Rechnen mit Termen

Mag. Martin Bruckbauer

22. September 2008

1 Vorbemerkungen

1.1 Variable und Terme

Definition: Eine *Variable* ist ein Symbol, das stellvertretend für Zahlen steht. Es ist möglich, dass nicht jede Zahl für eine Variable eingesetzt werden darf.
Ein *Term* (oder mathematischer Ausdruck) ist eine sinnvolle Verknüpfung aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen.

Beispiele von Termen: $4,\ 5-2,\ x,\ 5y,\ \frac{x-3}{y+1},\ (a-b)^2,\ \sqrt{x^2+1},\ ...$
Beispiele von Nicht-Termen: $x\cdot,\ 5+-3,\ :x,\ \frac{+}{\cdot 3},\ ...$

Anmerkung: Der Multiplikationspunkt darf zwischen Zahl (man nennt diese Zahl dann *Koeffizient*) und Variable weggelassen werden:

$$5 \cdot x = 5x$$

1.2 Einsetzen in Terme

zB Welchen Wert nehmen folgende Terme ein, wenn $x = 2$, $y = 3$ und $a = 5$ ist?

- $2x - y = 2 \cdot 2 - 3 = 1$
- $\frac{3a}{x+y} = \frac{3\cdot 5}{2+3} = 3$
- $(x+a)^3 = (2+5)^3 = 343$
- $x^2 + x + 1 = 2^2 + 2 + 1 = 7$

1.3 Umsetzen in die mathematische Schreibweise

zB $x \in \mathbb{R}$. Wie lautet der Term für:

- die gegenüber x um 1 verringerte Zahl? $[x-1]$

- das Dreifache von x? [$3x$]
- die dritte Potenz von x? [x^3]
- den Kehrwert des Quadrats von x? [$\frac{1}{x^2}$]
- die Kubikwurzel aus dem Kehrwert des Viertels von x? [$\sqrt[3]{\frac{1}{\frac{x}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{x}}$]

1.4 Das Summenzeichen

Das Summenzeichen ist eine Kurzsschreibweise für die Addition, wobei die addierten Zahlen meist mit Nummern (Indices) versehen werden:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \sum_{i=1}^{5} x_i$$

„Die Summe aller x_i von $i = 1$ bis 5.“ Der Index i nimmt hier von 1 bis 5 auf einenader folgend die Werte 1 bis 5 an. Der Buchstabe, der für den Index gewählt wird, ist egal.

zB:

- $\sum_{k=0}^{4} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
- $\sum_{j=2}^{5} p_j q_j = p_2q_2 + p_3q_3 + p_4q_4 + p_5q_5$
- $4a_1 + 4a_2 + 4a_3 = \sum_{i=1}^{3} 4a_i$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n}$
- Ein typisches Beispiel für die Verwendung des Summenzeichens ist das *arithmetische Mittel* $\overline{x}$:

  $$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

  (wobei $x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n$ n Zahlen sind).

2 Klammern

2.1 Minus vor einer Klammer

Steht vor einer Klammer ein Plus, kann die Klammer einfach weggelassen werden. Steht vor einer Klammer ein Minus, werden alle Vorzeichen in der Klammer „umgedreht". z.B.:

- $2-(a+2)=2-a-2=-a$
- $4-(3-x)=4-3+x=1+x$
- $4-(-a+x-b)=4+a-x+b$

Bei geschachtelten Klammern, empfiehlt es sich, die Klammern *von innen nach außen* aufzulösen:

- $4x+[-2y-(3x-y)]=$
  $4x+[-2y-3x+y]=$
  $4x-2y-3x+y=$
  $x-y$
- $u-\{(2u-5v)-[(5u-v)-(-3u+v)]\}=$
  $u-\{2u-5v-[5u-v+3u-v]\}=$
  $u-\{2u-5v-[8u-2v]\}=$
  $u-\{2u-5v-8u+2v\}=$
  $u-\{-6u-3v\}=$
  $u+6u+3v=$
  $7u+3v$

2.2 Ausmultiplizieren und Herausheben

Regeln:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \qquad \text{Ausmultiplizieren}$$
$$a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c) \qquad \text{Herausheben}$$

Durch *Herausheben* wird eine Summe in ein Produkt umgeformt. Dies nennt man auch *Faktorisieren*. Oft sind Produkte „praktischer" als Summen (z.B. beim Kürzen von Brüchen). z.B.:

- $2x^2-4x=2x\,(x-2)$
- $5v-2u=(-1)\cdot(-5v+2u)$
- $7x-4ax+7y-4ay=$
  $x\,(7-4a)+y\,(7-4a)=$
  $(7-4a)\,(x+y)$

Ausmultiplizieren:

- $2 \cdot (a - 6b) = 2a - 12b$
- $x - x\,(y-1) =$
  $x - (xy - x) =$
  $x - xy + x =$
  $2x - xy =$
  $x\,(2-y)$

Achtung! $2\,(a \cdot b) \neq 2a \cdot 2b$!

2.3 Multiplikation von Summen

Zwei Summen werden multipliziert, indem man *jeden* Summanden der einen Summe mit *jedem* Summanden der anderen Summe multipliziert:

$$(a+b) \cdot (c+d) = ac + ad + bc + bd$$

z.B.:

- $(2x+4) \cdot (x-1) =$
  $2x^2 - 2x + 4x - 4 =$
  $2x^2 + 2x - 4 =$
  $2\,(x^2 + x - 2)$
- $(2u - 4v + z) \cdot (u - 3v) =$
  $2u^2 - 6uv - 4uv + 12v^2 + uz - 3vz =$
  $2u^2 - 10uv + 12v^2 + uz - 3vz$
- $(2a+b) \cdot (3a-b) \cdot (5a-2b) =$
  $(6a^2 - 2ab + 3ab - b^2) \cdot (5a - 2b) =$
  $(6a^2 + ab - b^2) \cdot (5a - 2b) =$
  $30a^3 - 12a^2b + 5a^2b - 2ab^2 - 5ab^2 + 2b^3 =$
  $30a^3 - 7a^2b - 7ab^2 + 2b^3$
- $(x+y) \cdot [x^2 - (2x-y)\,(3x+2y)] =$
  $(x+y) \cdot [x^2 - (6x^2 + 4xy - 3xy - 2y^2)] =$
  $(x+y) \cdot [x^2 - 6x^2 - 4xy + 3xy + 2y^2] =$
  $(x+y) \cdot [-5x^2 - xy + 2y^2] =$
  $-5x^3 - x^2y + 2xy^2 - 5x^2y - xy^2 + 2y^3 =$
  $-5x^3 - 6x^2y + xy^2 + 2y^3$

2.4 Binomische Formeln

Unter einem *Binom* versteht man eine Summe oder Differenz aus zwei Gliedern. Also z.B. $(x+y)$. Binome kommen sehr häufig vor, deshalb formuliert man folgende drei *binomische Formeln*:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Achtung!

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2 \qquad\qquad (a-b)^2 \neq a^2 - b^2$$

z.B.:

- $(3x+2y)^2 =$
  $(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 =$
  $9x^2 + 12xy + 4y^2$
- $(r-5s)^2 =$
  $r^2 - 2 \cdot r \cdot 5s + (5s)^2 =$
  $r^2 - 10rs + 25s^2$
- $(2a+5b)(5b-2a) =$
  $(5b+2a)(5b-2a) =$
  $25b^2 - 4a^2$

2.5 Faktorisieren mit Hilfe der binomischen Formeln

Faktorisieren bedeutet, einen Term in ein Produkt zu verwandeln. Hierfür gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten:

- Herausheben von Faktoren (siehe Kap. 2.2 auf Seite 3)
- Faktorisieren mit Hilfe der binomischen Formeln

z.B.:
$4x^2 - 12x + 9$ scheint von der Form $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ zu sein. Dann müsste gelten: $4x^2 = a^2$ also $2x = a$ und $9 = b^2$ also $3 = b$. Nun müssen wir noch überprüfen, ob auch das „gemischte Glied“ in die Form passt: $12x = 2 \cdot 2x \cdot 3$. Da dies stimmt, kann man schreiben:

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$$

z.B.:

- $16y^2 + 8y + 1 = (4y+1)^2$
- $8a^2 - 24ab + 18b^2 =$
  $2(4a^2 - 12ab + 9b^2) =$
  $2(2a-3b)^2$
- $3d^3 - 12d =$
  $3d(d^2 - 2^2) =$
  $3d(d+2)(d-2)$

3 Potenzen

3.1 Wiederholung

Die Potenzschreibweise ist eine Kurzschreibweise für die Multiplikation einer Zahl mit sich selbst:

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{\text{n Faktoren}}$
- Vergleiche: $3a = a + a + a$ und $a^3 = a \cdot a \cdot a$
- Potenzieren vor Punktrechnung:
  $2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$ und *nicht*: $2 \cdot 3^2 = 6^2 = 36$!
  aber $(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$!
- Wenn negative Zahlen potenziert werden, wird das Ergebnis
  - positiv, wenn die Hochzahl *gerade* ist. z.B.: $(-2)^4 = 16$
  - negativ, wenn die Hochzahl *ungerade* ist. z.B.: $(-2)^3 = -8$
- Jede Zahl „hoch Null“ ist 1! $\quad a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

3.2 Potenzen mit negativen Hochzahlen

Potenzen mit *negativen* Hochzahlen kann man folgendermaßen schreiben:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)}$$

Daher gilt auch:

$$\boxed{\frac{1}{a^{-n}} = a^n \quad (a \neq 0)}$$

Möchte man also eine negative Hochzahl mit einer positiven Hochzahl schreiben, wechselt diese Potenz die Seite des Bruchstrichs!
z.B.:

- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
- $\frac{1}{3^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{3^2}} = 3^2 = 9$
- $\frac{1}{4} = 4^{-1}$
- $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{9}{16}\right)} = \frac{16}{9}$

Schreibe mit positiven Hochzahlen:

- $\dfrac{a \cdot b^{-2}}{c^{-3}} = \dfrac{a \cdot c^3}{b^2}$
- $\dfrac{x^{-3}y^{-2}z^2}{2^{-1}a^2} = \dfrac{2z^2}{a^2x^3y^2}$

Schreibe ohne Bruchstrich:

- $\dfrac{2}{x^2y^{-1}} = 2x^{-2}y$
- $\dfrac{3^{-2}a^2}{2b^3cd^{-1}} = 2^{-1}3a^2b^{-3}c^{-1}d$

3.3 Gleitkommadarstellung

Man kann jede Zahl als Produkt einer Zahl zwischen 1 und 9 und einer Zehnerpotenz schreiben. Diese Schreibweise ist vor allem bei sehr großen und sehr kleinen Zahlen vorteilhaft:

$$m \cdot 10^n \quad \text{wobei } 1 \leq m \leq 9$$

- $1234 = 1,234 \cdot 10^3$
- $1234567890 = 1,23456789 \cdot 10^9$
- $0,00033 = 3,3 \cdot 10^{-4}$
- $0,000000000000004711 = 4,711 \cdot 10^{-15}$

Allgemein:
$m \cdot 10^n$ bedeutet, bei m das Komma um n Stellen nach *rechts* zu verschieben.
$m \cdot 10^{-n}$ bedeutet, bei m das Komma um n Stellen nach *links* zu verschieben.

3.4 Rechnen mit Potenzen

3.4.1 Addition oder Subtraktion von Potenzen

Nur Potenzen mit *gleichen Basen und gleichen Hochzahlen* können addiert oder subtrahiert werden!
z.B.:

- $3a^2 + 2a^2 = 5a^2$
- $3x^2 + 5x - x^2 + x = 2x^2 + 6x$

3.4.2 Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

z.B.:

$$a^3 \cdot a^4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{a^3} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{a^4} = a^7 = a^{3+4}$$

Allgemein:
Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden *multipliziert*, indem man die Hochzahlen *addiert*:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

z.B.:

- $10 \cdot 10^3 = 10^1 \cdot 10^3 = 10^4$
- $2a^3 \cdot b \cdot 3a^2 \cdot 5b^3 = 30a^5b^4$
- $(x-2y)^2 \cdot (x-2y) \cdot (x+2y)^2 = (x-2y)^3 \cdot (x+2y)^2$

3.4.3 Division von Potenzen mit gleicher Basis

z.B.:

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}^{a^5}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a}_{a^3}} = a \cdot a = a^{5-3}$$

$$\frac{a^2}{a^4} = \frac{\overbrace{a \cdot a}^{a^2}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{a^4}} = \frac{1}{a \cdot a} = a^{-2} = a^{2-4}$$

Allgemein:
Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden *dividiert*, indem man die Hochzahlen *subtrahiert*:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a \neq 0}$$

z.B.:

- $2 \cdot \frac{x^5}{x^4} = 2x$
- $\frac{x \cdot y^2}{x^{-5}} = x^{1-(-5)}y^2 = x^6y^2$
- $\frac{(a+b)}{(a+b)^3} = (a+b)^{1-3} = \frac{1}{(a+b)^2}$

3.4.4 Potenz eines Produkts

z.B.:

$$(a \cdot b)^4 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = a^4 \cdot b^4$$

Allgemein:
Ein *Produkt* wird potenziert, indem man *jeden Faktor potenziert*:

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

z.B.:

- $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$
- $(3xy)^3 = 3^3 \cdot x^3 \cdot y^3 = 27x^3y^3$

3.4.5 Potenz eines Bruchs

z.B.:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$$

Allgemein:
Ein *Bruch* wird potenziert, indem man *Zähler und Nenner potenziert*:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad b \neq 0}$$

z.B.:

- $\left(\frac{x}{5}\right)^3 = \frac{x^3}{125}$
- $\left(\frac{2x}{3}\right)^2 = \frac{(2x)^2}{3^2} = \frac{4x^2}{9}$

3.4.6 Potenz einer Potenz

z.B.:

$$\left(a^2\right)^3 = \underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}_{\text{3 Faktoren}} = a^6 = a^{2 \cdot 3}$$

Allgemein:
Eine Potenz wird potenziert, indem man die Hochzahlen multipliziert: (Die Basis bleibt gleich!)

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

z.B.:

- $\left(10^2\right)^3 = 10^6$
- $\left(10^2\right)^{-3} = 10^{-6} = \dfrac{1}{10^6}$
- $\left(10^{-2}\right)^{-3} = 10^6$
- $\left(2x^2\right)^3 = 2^3 \cdot \left(x^2\right)^3 = 8x^6$

[Beispiele]

4 Wurzeln

4.1 Wurzeln als Potenzen

Eine Wurzel ist (mit Einschränkungen) das *„Gegenteil“* einer Potenz. Genauer gesagt:

Definition: Die *n-te Wurzel* ($n \in \mathbb{N}^*$) aus einer nichtnegativen Zahl a heißt jene nichtnegative Zahl w, deren n-te Potenz gleich a ist:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = w \Leftrightarrow w^n = a}$$

a heißt *Radikand* und n *Wurzelexponent*.

Anmerkungen zu Quadratwurzeln:

- Aus einer negativen Zahl kann keine Wurzel gezogen werden. Beispielsweise ergibt $\sqrt{-9}$ keinen Sinn, da es keine Zahl gibt, die quadriert -9 ergibt. Achtung: $(-3)^2 = +9$!
- Eine Wurzel ist immer positiv! z.B. $\sqrt{4} = 2$ und nicht auch $= -2$ (auch, wenn $(-2)^2 = 4$ ist.) (Nicht zu verwechseln mit der Lösung der Gleichung $x^2 = 4$. Hier hat x sehr wohl 2 Lösungen, nämlich $+2$ und -2.)

Man kann Wurzeln folgendermaßen als Potenzen schreiben:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

($m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}^*$)

Beispiele:

Schreibe als Potenz:

- $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$
- $\sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{2}{5}}$
- $\sqrt{a^{-3}} = a^{-\frac{3}{2}}$
- $\sqrt[4]{\frac{1}{a}} = a^{-\frac{1}{4}}$
- $\sqrt[3]{(a+b)^2} = (a+b)^{\frac{2}{3}}$

Schreibe als Wurzel:

- $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
- $b^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{b^3}$
- $a^{-\frac{3}{7}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^3}}$
- $(a+1)^{0,2} = \sqrt[5]{a+1}$
- $(x-y)^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{(x-y)^3}}$

4.2 Rechenregeln für Wurzeln

Da Wurzeln als Potenzen darstellbar sind, gelten für Wurzeln die Rechenregeln für Potenzen. Insbesondere:

Potenzen	**Wurzeln**
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Beispiele: (Vereinfache auf eine Wurzel bzw. berechne)

- $2 \cdot \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$
- $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$
- $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{10}{5}} = \sqrt{2}$
- $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a}$
- $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 5^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{5^5}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^2}{2}} = \sqrt[6]{2}$

4.3 Faktor unter die Wurzel bringen

Einen Faktor kann man unter die n-te Wurzel bringen, indem man ihn als n-te Potenz unter die Wurzel schreibt:

z.B.:

- $a\sqrt{2} = \sqrt{a^2 \cdot 2}$
- $y\sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{y^4 \cdot b}$
- $\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

4.4 Partielles Wurzelziehen

Beim partiellen (teilweisen) Wurzelziehen versucht man, den Radikanden so als Produkt darzustellen, dass aus einem Faktor die Wurzel gezogen werden kann:

z.B.:

- $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
- $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
- $\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{125 \cdot 4} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{4} = 5 \cdot \sqrt[3]{4}$
- $\sqrt{5x^2y^3} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^3} = \sqrt{5} \cdot x \cdot \sqrt{y^2 \cdot y} = xy \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{y}$

5 Bruchterme

5.1 Definitionsmenge

In Bruchtermen kann es Zahlen geben, die nicht für die jeweiligen Variablen eingesetzt werden können, da sich dadurch eine (unerlaubte) Division durch 0 ergeben würde. Z.B. kann in den Term

$$\frac{1}{x+1}$$

für x nicht der Wert -1 eingesetzt werden. Denn:

$$\frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0}$$

Warum ist die Division durch 0 nicht möglich?

Die Division kann entweder als wiederholte Subtraktion oder als Umkehrung der Multiplikation gesehen werden.

→ Bei der *wiederholten Subtraktion* bedeutet dies z.B.:
Wie oft muss man 4 von 12 abziehen um 0 zu erhalten?

$$\begin{aligned} 12 - 4 &= 8 \\ 8 - 4 &= 4 \\ 4 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Antwort: 3 mal. Also gilt

$$12 : 4 = 3$$

Bei 12 : 0 lautet die Frage: Wie oft muss man 0 von 12 abziehen um 0 zu erhalten? - Keine Anzahl von Operationen bringt das gewünschte Ergebnis.

→ Betrachtet man die Division als *Umkehrung der Multiplikation* sucht man eine Zahl x, welche die Gleichung

$$b \cdot x = a$$

erfüllt. Diese Zahl x schreibt man als Quotienten

$$x = \frac{a}{b}$$

Will man umgekehrt die Gleichung

$$x = \frac{a}{0}$$

lösen, bedeutet dies:

$$0 \cdot x = a$$

Diese Gleichung ist nur für $a = 0$ gültig. Ist $a \neq 0$, kann man kein x angeben, dass die Gleichung wahr machen würde.

Da die Division durch 0 also nicht möglich ist, muss man bei Bruchtermen die Menge von möglichen einsetzbaren Zahlen einschränken. Man bildet eine sogenannte **Definitionsmenge** $\mathbb{D}$, die alle Elemente der Grundmenge enthält außer denjenigen, die eine Division durch 0 bedingen würden.

z.B.:

$$\frac{1}{x+1} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Beispiele:

- $\dfrac{3a+2}{1-a}$ Nenner: $1 - a = 0 \;\Rightarrow\; 1 = a \;\Rightarrow\; \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $\dfrac{1}{x^2-1}$ Nenner: $x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \pm 1 = x \;\Rightarrow\; \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

5.2 Kürzen eines Bruchterms

Ein Faktor kann aus einem Bruchterm nur gekürzt werden, wenn er Faktor eines Produkts ist (wenn er *herausgehoben* werden kann). (Merke: „Aus der Summe kürzt der Dumme!“)

z.B.:

- $\frac{4ab}{8a^2} = \frac{\cancel{4}\,\cancel{a}b}{\cancel{8}a^{\cancel{2}}} = \frac{b}{2a}$
- $\frac{mx - nx}{x^2} = \frac{x(m-n)}{x^2} = \frac{\cancel{x}(m-n)}{x^{\cancel{2}}} = \frac{m-n}{x}$
- $\frac{b^2 - 4b + 4}{b^2 - 4} = \frac{(b-2)^2}{(b-2)(b+2)} = \frac{(b-2)^{\cancel{2}}}{(\cancel{b} \cancel{-} \cancel{2})(b+2)} = \frac{b-2}{b+2}$

5.3 Addition und Subtraktion eines Bruchterms

Brüche können nur dann addiert oder subtrahiert werden, wenn sie den gleichen Nenner haben. Ist dies nicht der Fall, muss man die Bruchterme auf gemainsamen Nenner bringen. Um durch das Erweitern nicht unnötig lange Zähler (und Nenner) zu bekommen, sucht man das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der einzelnen Nenner, indem man

1. die einzelnen Nenner faktorisiert
2. das kgV der Nenner als gemeinsamen Nenner nimmt
3. und erweitert.

Beispiel

$$\frac{2m}{15ab} - \frac{n}{9a} = ?$$

Faktorisierung der Nenner		kgV der Nenner	Erweiterungsfaktor
$15ab =$	$3 \cdot 5 \cdot a \cdot b$	$3^2 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 45ab$	3
$9a =$	$3^2 \cdot a$		$5b$

Das kgV ensteht dadurch, dass man *alle* in der linken Spalte vorkommenden *Faktoren* in ihrer *höchsten Potenz* (hier z.B. 3^2 statt einfach nur 3) miteinander multipliziert.

Nun wird erweitert und dann kann subtrahiert werden:

$$\frac{2m}{15ab} \cdot \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{3}} - \frac{n}{9a} \cdot \frac{\mathbf{5b}}{\mathbf{5b}} = \frac{6m - 5bn}{45ab}$$

Ein weiteres Beispiel

$$\frac{5}{b-1} - \frac{6b}{b^2-1} - \frac{1-2b}{b+b^2}$$

Faktorisierung der Nenner	kgV der Nenner	Erweiterungsfaktor
$b-1 = \quad (b-1)$		$b \cdot (b+1)$
$b^2-1 = \quad (b-1)\cdot(b+1)$	$N = b\cdot(b+1)\cdot(b-1)$	b
$b+b^2 = \quad b\cdot(b+1)$		$(b-1)$

Wieder besteht der gemeinsame Nenner N aus allen Faktoren der linken Spalte. Und nun erweitern:

$$\frac{5}{b-1}\cdot\frac{\mathbf{b(b+1)}}{\mathbf{b(b+1)}} - \frac{6b}{b^2-1}\cdot\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b}} - \frac{1-2b}{b+b^2}\cdot\frac{\mathbf{b-1}}{\mathbf{b-1}} =$$

$$\frac{5(b^2+b)-6b^2-(b-1-2b^2+2b)}{N} =$$

$$\frac{5b^2+5b-6b^2-b+1+2b^2-2b}{N} =$$

$$\frac{b^2+2b+1}{N} = \frac{(b+1)^2}{b(b+1)(b-1)} = \frac{b+1}{b(b-1)}$$

5.4 Multiplikation von Bruchtermen

Brüche werden multipliziert, indem man „Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner“ rechnet. Bei Bruchtermen empfielt es sich, gegebenenfalls vorher „kreuzweise“ zu kürzen:

Beispiele:

- $\left(-\frac{a}{2b}\right)\cdot\left(\frac{2b^2}{a-2}\right) = \left(-\frac{a}{\cancel{2}\,\cancel{b}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{2}b^{\cancel{2}}}{a-2}\right) = -\frac{ab}{a-2}$
- $\frac{xy^2-4x}{5y}\cdot\frac{5y^2}{2xy+4x} = \frac{x(y^2-4)}{5y}\cdot\frac{5y^2}{2x(y+2)} =$
  $\frac{x(y-2)(y+2)}{5y}\cdot\frac{5y^2}{2x(y+2)} = \frac{\cancel{x}(y-2)(\cancel{y}\cancel{+}\cancel{2})}{\cancel{5}\,\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{5}y^{\cancel{2}}}{2\,\cancel{x}(\cancel{y}\cancel{+}\cancel{2})} =$
  $\frac{y(y-2)}{2}$

5.5 Division von Bruchtermen

Brüche werden dividiert, indem man mit dem Kehrwert (des 2. Bruchs) multipliziert. Das gilt natürlich auch für Bruchterme:

Beispiele:

- $3x : \frac{a}{b} = 3x \cdot \frac{b}{a} = \frac{3xb}{a}$
- $\left(\frac{3x^2}{y} + \frac{x}{5}\right) : (3x) = \left(\frac{3x^2}{y} + \frac{x}{5}\right) \cdot \frac{1}{3x} = \frac{3x^2}{3xy} + \frac{x}{15x} = \frac{x}{y} + \frac{1}{15}$

  (Natürlich hätte man hier auch zuerst die Klammer ausrechnen können.)
- $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x+1}} =$

  Wir ersetzen den Hauptbruchstrich durch das Divisionszeichen:

  $$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) : \frac{x}{x+1} =$$
  $$\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} \cdot \frac{x}{x}\right) : \frac{x}{x+1} =$$
  $$\frac{x+1-x}{x(x+1)} : \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x^2}$$

Inhaltsverzeichnis