

Quadratische Gleichungen und Gleichungen höheren Grades

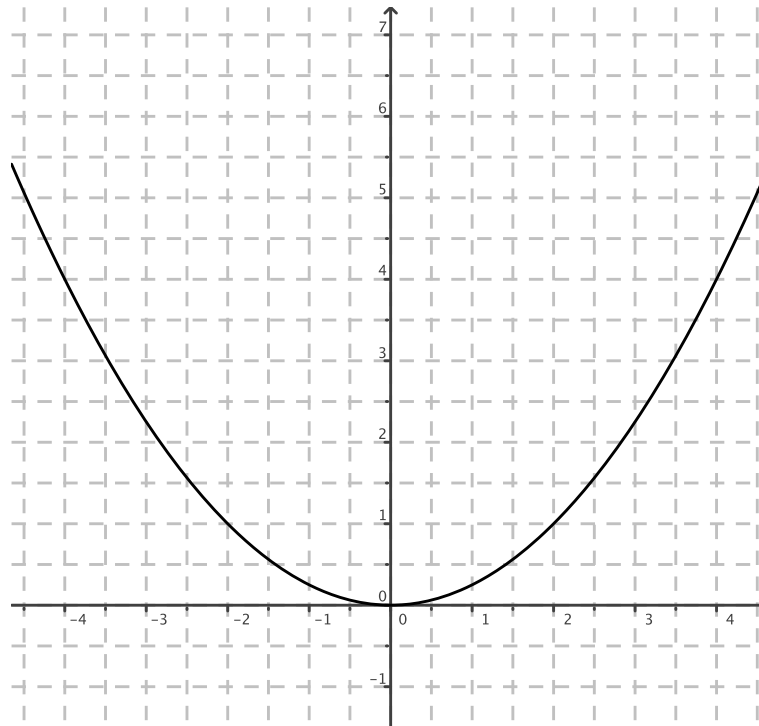
Mag. Martin Bruckbauer

20. April 2009

1 Quadratische Funktion/Gleichung

1.1 Graph einer quadratischen Funktion

Wir zeichnen den Graph der Funktion $y = \frac{1}{4}x^2$ zwischen $x = -4$ und $x = 4$:



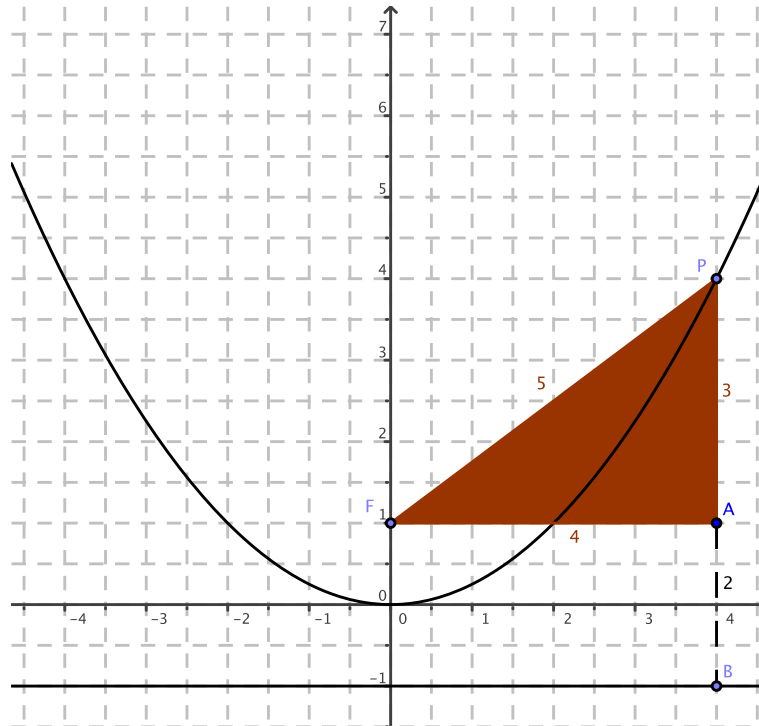
Der Graph der Funktion ist eine *Parabel*. Die Definition einer Parabel lautet:

Jeder Punkt einer Parabel hat von einem festen Punkt F (Brennpunkt) und einer festen Geraden g (Leitlinie) denselben Abstand.

Dass das für unseren Funktionsgraph stimmt, ist leicht nachzuprüfen: Der Brennpunkt ist $F(1/0)$ und die Gerade $g : y = -1$.

Wenn wir beispielsweise den Punkt $P(4/4)$ betrachten, so hat P von g den Abstand $\overline{PB} = 5$. Den Abstand zu F können wir über das rechtwinklige Dreieck FAP und den Satz des Pythagoras berechnen: $\overline{PA} = 3$ und $\overline{FA} = 4$. Daher gilt:

$$\overline{FP} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$



Dies ließe sich auch allgemein für jeden Punkt am Graphen der Funktion zeigen.

Definition: Eine Funktion mit der Gleichung

$$y = ax^2 + bx + c$$

($a, b, c \in \mathbb{R}$ sind beliebige Konstante, jedoch $a \neq 0$),
nennt man *quadratische Funktion* oder *Polynomfunktion 2. Grades*.

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine *Parabel*.

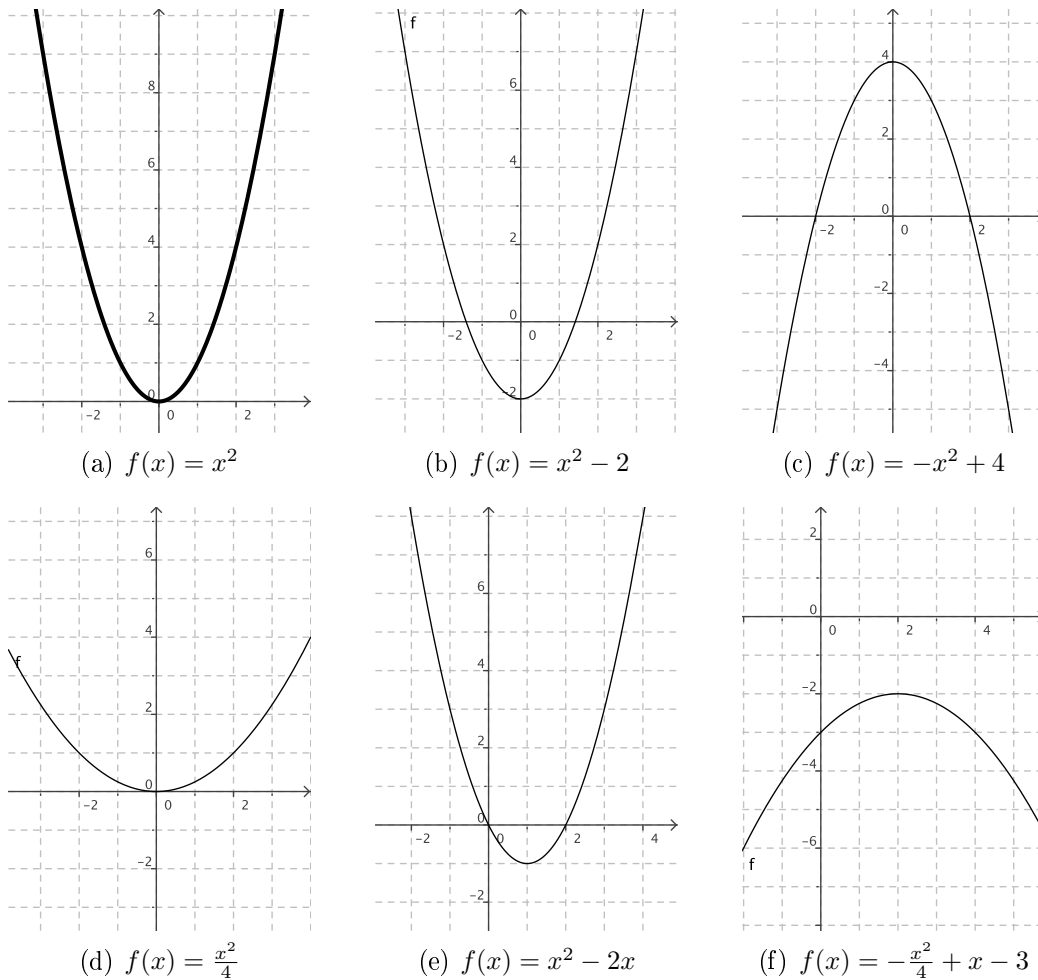


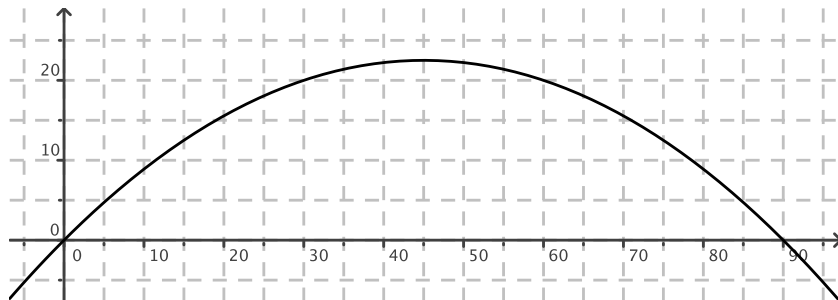
Abbildung 1: Graphen verschiedener quadratischer Funktionen

Beispiel - Wurfparabel:

Auf einem ebenen Gelände wird ein Körper vom Erdboden unter dem Winkel von 45° mit einer Geschwindigkeit von 30 m/s schräg nach oben geworfen. Aus der Physik weiß man, dass die Gleichung der Flugbahn lautet:

$$y = -\frac{x^2}{90} + x$$

Ermittle die maximale Wurfhöhe und die Wurfweite!



Aus der Grafik kann man ablesen, dass die maximale Wurfhöhe 22,5 m und die Wurfweite 90 m beträgt.

Rechnerisch müssen wir folgende Gleichungen lösen:

- Die Wurfweite erhalten wir, indem wir berechnen, wo die Wurfhöhe gleich 0 ist. Also:

$$\begin{aligned}
 y &= 0 \\
 -\frac{x^2}{90} + x &= 0 \\
 -x^2 + 90x &= 0 \\
 x(-x + 90) &= 0
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist dann gleich 0, wenn entweder $x = 0$ ist oder $-x + 90 = 0$ ist. Die erste Lösung ist daher 0 (das entspricht der Weite 0 vor dem Wurf) und die zweite Lösung ist 90 (was dem Aufprall entspricht).

Die Wurfweite ist daher 90 m.

- Die maximale Wurfhöhe erhalten wir aus der Überlegung, dass die Parabel symmetrisch zum Maximum (Scheitel) ist. Wir müssen also die Höhe nach 45 m Weite berechnen:

$$\begin{aligned}
 y &= -\frac{x^2}{90} + x \\
 y &= -\frac{45^2}{90} + 45 \\
 y &= 22,5
 \end{aligned}$$

1.2 Quadratische Gleichungen - Lösungsformeln

Es tauchen in der Praxis immer wieder Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

auf. Betrachten wir beispielweise folgende Gleichung:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Lösungsformeln für quadratische Gleichungen

Form: $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

„Große“ Lösungsformel oder
„a-b-c-Formel“

Form: $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

„Kleine“ Lösungsformel oder
„p-q-Formel“

Wir können unsere Gleichung

$$x^2 + x - 6 = 0$$

nun also mit zwei Lösungsformeln lösen. Da sie jedoch der Form der p-q-Formel entspricht (dh es steht „keine“ Zahl - außer 1 - vor dem x^2), verwenden wir die p-q-Formel:

$$p = 1$$

$$q = -6$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6}$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -3$$

Es wäre auch möglich gewesen, die a-b-c-Formel zu verwenden, dann wäre $a = 1$, $b = 1$ und $c = -6$ gewesen und wir hätten

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

berechnen müssen.

1.3 Hat eine quadratische Gleichung immer zwei Lösungen?

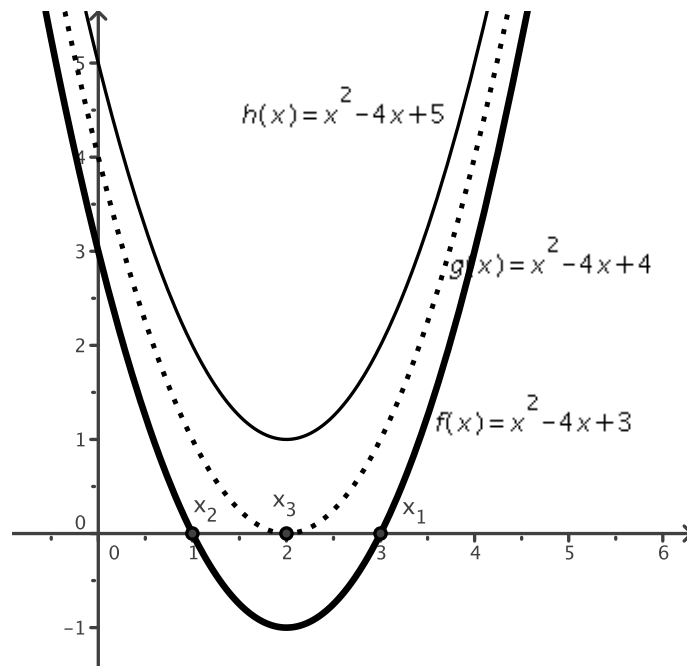
Betrachten wir folgende quadratische Gleichungen:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \tag{1}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \tag{2}$$

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \tag{3}$$

Die Lösung einer quadratischen Gleichung entspricht grafisch den Punkten, an denen der Graph der Funktion die x-Achse schneidet. Wir zeichnen also die drei Graphen:



Offensichtlich hat die Gleichung (1) *zwei* Lösungen, die Gleichung (2) *eine* Lösung und die Gleichung (3) *keine* Lösung.

Wir berechnen die Lösungen mit der p-q-Formel:
Gleichung (1):

$$\begin{aligned}
 p &= -4 \\
 q &= 3 \\
 x_{1,2} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} \\
 x_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{4 - 3} \\
 x_{1,2} &= 2 \pm 1 \\
 x_1 &= 3 \\
 x_2 &= 1
 \end{aligned}$$

Gleichung (2):

$$\begin{aligned}
 p &= -4 \\
 q &= 4 \\
 x_{3,4} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 4} \\
 x_{3,4} &= 2 \pm \sqrt{4 - 4} \\
 x_{3,4} &= 2 \pm 0 \\
 x_3 &= 2 \\
 x_4 &= 2
 \end{aligned}$$

Da der Wert unter der Wurzel 0 ist, gibt es nur *eine* Lösung.

Gleichung (3):

$$\begin{aligned}p &= -4 \\q &= 5 \\x_{4,5} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 5} \\x_{4,5} &= 2 \pm \sqrt{4 - 5} \\x_{4,5} &= 2 \pm \sqrt{-1}\end{aligned}$$

Die Zahl $\sqrt{-1}$ gibt es nicht (innerhalb der reellen Zahlen), daher gibt es hier *keine* Lösung.

Die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung hängt also davon ab, ob der Wert der Zahl unter der Wurzel

- > 0 (2 Lösungen)
- $= 0$ (1 Lösung)
- < 0 (keine Lösung)

ist. Man nennt daher $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ auch *Diskriminante*¹.

Vereinfachter Fundamentalsatz der Algebra:

Eine quadratische Gleichung in \mathbb{R} hat *maximal* 2 Lösungen.

1.4 Sonderformen quadratischer Gleichungen

Fall A:

Die quadratische Gleichung hat *kein lineares Glied* - also kein x . Z.B.:

$$2x^2 - 32 = 0$$

Dann ist es einfacher, die Gleichung folgendermaßen zu lösen:

$$\begin{aligned}2x^2 - 32 &= 0 \\x^2 - 16 &= 0 \\x^2 &= 16 && |\sqrt{} \\x_{1,2} &= \pm 4 \\x_1 &= 4 \\x_2 &= -4\end{aligned}$$

¹ *discriminare* = unterscheiden (lat.)

Fall B:

Die quadratische Gleichung hat *kein absolutes Glied* - also keine Zahl ohne x . Z.B.:

$$3x^2 - 2x = 0$$

Dann ist es einfacher, die Gleichung folgendermaßen zu lösen:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2x &= 0 && |x \text{ herausheben} \\ x \cdot (3x - 2) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Die beiden Lösungen erhält man aus der Überlegung, dass die Multiplikation $x \cdot (3x - 2)$ dann 0 ist, wenn entweder der linke oder rechte Faktor 0 ist.² Also muss entweder das linke $x = 0$ sein (daher ist $x_1 = 0$) oder die Klammer $(3x - 2) = 0$ sein. Und die Klammer ist dann 0, wenn $x = \frac{2}{3}$ ist (daher $x_2 = \frac{2}{3}$).

1.5 Der Satz von Vieta

Zwischen den Lösungen x_1 und x_2 einer quadratischen Gleichung und deren Koeffizienten p und q besteht folgender Zusammenhang:

Satz von Vieta

Sind x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so gilt:

(1) $x_1 + x_2 = -p$ sowie $x_1 \cdot x_2 = q$

(2) $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ „Zerlegungsformel“ in Linearfaktoren.

Beispiel:

Zerlege die Gleichung $3x^2 - 11x - 4$ in ein Produkt!

Wir lösen zunächst die Gleichung:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{6} \\ x_{1,2} &= \frac{11 \pm 13}{6} \\ x_1 &= 4 \\ x_2 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Also gilt laut dem Satz von Vieta:

$$3x^2 - 11x - 4 = 3(x - 4) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)$$

²Man nennt diesen Zusammenhang übrigens *Nullproduktsatz*.

Beispiel:

Finde eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = -3$!
Laut dem Satz von Vieta gilt;

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$\frac{1}{2} - 3 = -p$$

$$\frac{5}{2} = p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$$\frac{1}{2} \cdot (-3) = q$$

$$-\frac{3}{2} = q$$

Die gesuchte Gleichung lautet daher:

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{oder auch}$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

1.6 Wurzelgleichungen

Löse folgende Wurzelgleichung (sie führt auf eine quadratische Gleichung)!

$$\begin{aligned} \sqrt{x+5} + \sqrt{x-10} &= \sqrt{2x+3} && |^2 \\ x+5 + 2 \cdot \sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x-10} + x-10 &= 2x+3 \\ 2 \cdot \sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x-10} &= 8 \\ \sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x-10} &= 4 && |^2 \\ x^2 + 5x - 10x - 50 &= 16 \\ x^2 - 5x - 66 &= 0 \\ x_1 &= 11 \\ x_2 &= -6 \end{aligned}$$

Beachte, dass beim Quadrieren immer wieder *binomische Formeln* vorkommen!

Probe:

x_1 :

$$\begin{aligned} \sqrt{11+5} + \sqrt{11-10} &= \sqrt{2 \cdot 11 + 3} \\ 4 + 1 &= 5 \quad \text{stimmt!} \end{aligned}$$

x_2 :

$$\sqrt{-6 + 5} + \dots$$

Geht nicht! Man kann aus einer negativen Zahl in \mathbb{R} keine Wurzel ziehen, daher ist -6 *keine* Lösung!

Um solche „Lösungen“ auszuschließen, muss bei Wurzelgleichungen *immer* eine Probe gemacht werden!