Mengen

Mag. Martin Bruckbauer

22. September 2008

1 Definition

Die Mengenlehre liefert in vielen Bereichen die „Sprache“ bzw. Schreibweise der Mathematik.

Definition: Unter einer *Menge* versteht man eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterscheidbarer Objekte. Diese Objekte nennt man *Elemente* der Menge.

Beispiele für Mengen:

- Menge der Schüler einer Klasse. Die einzelnen Schüler sind die Elemente dieser Menge.
- Menge der Pflichtgegenstände (einer Klasse).
- Menge der natürlichen Zahl bis einschließlich 5.

Aber nicht: Eine Menge Geld besitzen.

2 Angabe von Mengen

Es gibt zwei Arten, wie man Mengen angeben kann:

1. *aufzählende Form*: z.B. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
   Die Reihenfolge ist unwichtig!
2. *beschreibende Form*: z.B. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \land x \leq 5\}$ oder $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$

Mengen werden in Großbuchstaben angegeben, Elemente in Kleinbuchstaben.

Die Menge, die keine Elemente enthält, nennt man *leere Menge*. Sie wird mit dem Symbol $\{\}$ bezeichnet.

3 Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$	Menge der natürlichen Zahlen ohne Null
$\mathbb{N}_g = \{2, 4, 6, 8, ...\}$	Menge der geraden natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_u = \{1, 3, 5, 7, ...\}$	Menge der ungeraden natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen (Bruchzahlen)
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$	Menge der Primzahlen

Bemerkung: Es gibt *endliche Mengen* (mit einer endlichen Anzahl von Elementen) und *unendliche Mengen* (mit einer unendlichen Anzahl von Elementen.

4 Beziehungen und Verknüpfungen zwischen Mengen

4.1 Teilmenge

Definition: Eine Menge A heißt *Teilmenge* der Menge B, wenn jedes Element von A auch in B enthalten ist. Schreibweise: $A \subseteq B$
Enthält B mindestens ein Element, das nicht in A enthalten ist (also $A \neq B$), so bezeichnet man A als *echte Teilmenge* von B. Schreibweise: $A \subset B$

z.B. Bilde alle Teilmengen von a.) $A = \{a, b\}$ und b.) $B = \{1, 2, 3\}$:
Lösung:
a.) $\{a\}\,,\ \{b\}\,,\ \{a, b\}\,,\ \{\}$
b.) $\{1\}\,,\ \{2\}\,,\ \{3\}\,,\ \{1, 2\}\,,\ \{1, 3\}\,,\ \{2, 3\}\,,\ \{1, 2, 3\}\,,\ \{\}$

4.2 Vereinigung von Mengen

Definition: Die Menge aller Elemente, die mindestens zu einer der beiden Mengen A oder B gehören, heißt *Vereinigungsmenge* von A und B. Schreibweise: $A \cup B$

z.B. Bilde $A \cup B,\ A \cup C,\ B \cup C$
$A = \{1, 3\}\,,\ B = \{2, 4\}\,,\ C = \{a, b\}$
Lösung: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}\,,\ A \cup C = \{1, 3, a, b\}\,,\ B \cup C = \{2, 4, a, b\}$

4.3 Durchschnitt von Mengen

Definition: Die Menge aller Elemente, die sowohl zur Menge A als auch zur Menge B gehören, heißt *Durchschnittsmenge* oder *Schnittmenge* von A und

B. Schreibweise: $A \cap B$

z.B. Bilde $A \cap B,\ A \cap C,\ B \cap C$
$A = \{1, 2\}\,,\ B = \{2, 3, 4\}\,,\ C = \{3, 4\}$
Lösung: $A \cap B = \{2\}\,,\ A \cap C = \{\}\,,\ B \cap C = C = \{3, 4\}$

4.4 Differenzmenge

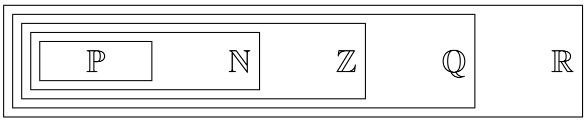
Definition: Die Menge aller Elemente, die zur Menge A aber nicht zur Menge B gehören, heißt *Differenzmenge* von A und B. Schreibweise: $A \backslash B$

z.B. Bilde $A \backslash B,\ A \backslash C,\ B \backslash C$
$A = \{1, 2\}\,,\ B = \{2, 3, 4\}\,,\ C = \{1, 3, 4\}$
Lösung: $A \backslash B = \{1\}\,,\ A \backslash C = \{2\}\,,\ B \backslash C = \{2\}$

4.5 Beziehung der Zahlenmengen zueinander

Welche Aussage ist richtig?

$\mathbb{N}^* \cap \mathbb{Z} = \{\}$	(f)	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$	(w)
$\mathbb{N}_u \cup \mathbb{N}_g = \mathbb{N}$	(w)	$\mathbb{R} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$	(f)
$\mathbb{N}^* \backslash \mathbb{Z} = \{0\}$	(f)	$\mathbb{P} \cap \mathbb{N} = \mathbb{P}$	(w)
$\{\} \subset \mathbb{Q}$	(w)	$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} = \{\}$	(f)



$$\mathbb{P} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Dass $\mathbb{R}$ wirklich größer ist als $\mathbb{Q}$ kann man dadurch zeigen, dass man Zahlen findet, die nicht als Bruch darstellbar sind. Beispiele für solche Zahlen sind: $\pi,\ e,\ \sqrt{2}$.

[Euklids Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.]

5 Die natürlichen Zahlen

5.1 Das kleinste gemeinsame Vielfache

Multipliziert man eine Zahl mit einer anderen, so nennt man das Ergebnis ein *Vielfaches* der ersten Zahl.

Vielfache von 8: 8, 16, **24**, 32, 40, **48**, 56, 64, **72**, ...
Vielfache von 12: 12, **24**, 36, **48**, 60, **72**, 84, 96, ...

24 ist das *kleinste gemeinsame Vielfache* von 8 und 12. Schreibweise:

$$kgV(8,12) = 24$$

5.2 Primfaktorzerlegung

Für die Bestimmung des kgV(8,12) machen wir eine Primfaktorzerlegung:

$$\begin{array}{r|l} 8 & :2 \\ 4 & :2 \\ 2 & :2 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 12 & :2 \\ 6 & :2 \\ 3 & :3 \\ 1 & \end{array}$$

Wir dividieren solange durch eine beliebige Primzahl, bis unten 1 stehen bleibt. Alle Primzahlen, durch die wir dividiert haben, sind die Primfaktoren der Zahl:

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$
$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$

Das kgV bekommt man nun dadurch, dass man **jeden vorkommenden Primfaktor in seiner höchsten Potenz** miteinander multipliziert:

$$2^3 \cdot 3 = 24$$

ein weiteres Beispiel: kgV(36, 54, 112)=?

$$\begin{array}{r|l} 36 & :2 \\ 18 & :2 \\ 9 & :3 \\ 3 & :3 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 54 & :2 \\ 27 & :3 \\ 9 & :3 \\ 3 & :3 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 112 & :2 \\ 56 & :2 \\ 28 & :2 \\ 14 & :2 \\ 7 & :7 \\ 1 & \end{array}$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$54 = 2 \cdot 3^3$$
$$112 = 2^4 \cdot 7$$

$$kgV(36,\ 54,\ 112) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 = 3024$$