Lineare Gleichungssysteme

Mag. Martin Bruckbauer

31. Mai 2005

1 Lineare Gleichung mit zwei Variablen

Beispiel

Eine Rechteck mit den Seitenlängen x und y hat den Umfang $u = 60$ cm. Was kann man über die Seitenlängen aussagen?

Für den Umfang gilt:

$$u = 2x + 2y$$

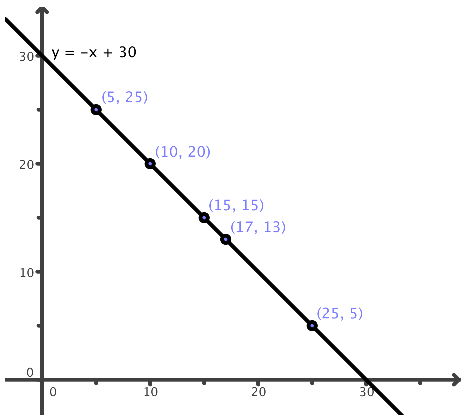
Löst man diese Gleichung nach y auf, erhält man:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 60 \\ x + y &= 30 \\ y &= 30 - x \end{aligned}$$

Jeder Wert zwischen 0 und 30 kann hier für x eingesetzt werden. Wir erhalten also *keine eindeutige Lösung*, sondern immer nur *Zahlenpaare*. Ist zB $x = 10$, dann muss automatisch $y = 20$ sein. Man schreibt dieses Zahlenpaar auch so an:

$$(10, 20)$$

Man kann die Gleichung $y = 30 - x$ auch als Funktion betrachten und grafisch darstellen. Alle Punkte (Zahlenpaare), die auf dem Graphen liegen, sind mögliche Lösungen der Gleichung:



Definition: Eine Gleichung der Form $ax + by = c$ bzw. $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ mit den Konstanten a, b, c und den Variablen x, y nennt man *lineare Gleichung mit zwei Variablen.*

2 Lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen (2×2)

Beispiel

Wir erweitern das vorige Beispiel (ein Rechteck hat einen Umfang von $u = 60$ cm) um eine weitere Information: Eine Rechtecktseite ist um 4 cm kürzer als die andere. Wie lang sind die Seiten?

Wenn x die längere und y die kürzere Seite ist, dann gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} y &= -x + 30 \\ y &= x - 4 \end{aligned}$$

Wir betrachten eine Auswahl der Zahlenpaare, die Lösungen der beiden Gleichungen sein können:

1. Gleichung: $y = -x + 30$

x	5	10	**17**	20	29
y	25	20	**13**	10	1

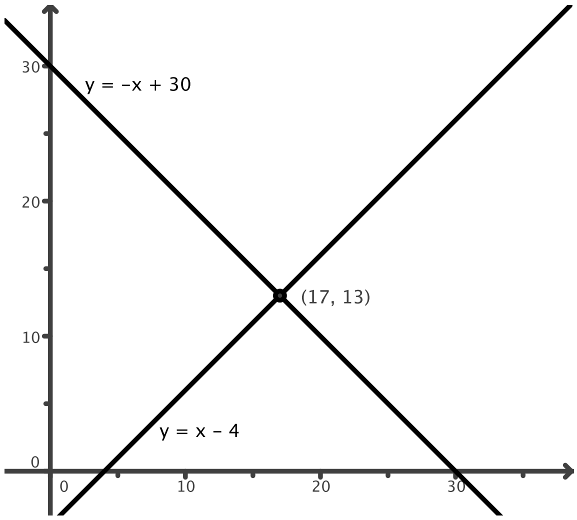
2. Gleichung: $y = x - 4$

x	10	14	**17**	20	25
y	6	10	**13**	16	21

Beide Gleichungen haben unendlich viele Lösungen. Das Zahlenpaar (17,13) erfüllt als einziges beiden Lösungen. Dies ist also unsere gesuchte Lösung. Man schreibt

$$\mathbb{L} = \{(17, 13)\} \text{ oder } x = 17 \text{ und } y = 13$$

Zeichnet man die Graphen der beiden Gleichungen (bzw. Funktionen), entspricht die Lösung dem Schnittpunkt der beiden Geraden:



Definition: Eine System von Gleichungen der Form

$$\begin{array}{c} ax + by = e \\ cx + dy = f \\ \hline \end{array}$$

mit den Konstanten a, b, c, d, e, f und den Variablen x, y nennt man ein *lineares Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit zwei Variablen* (2×2).

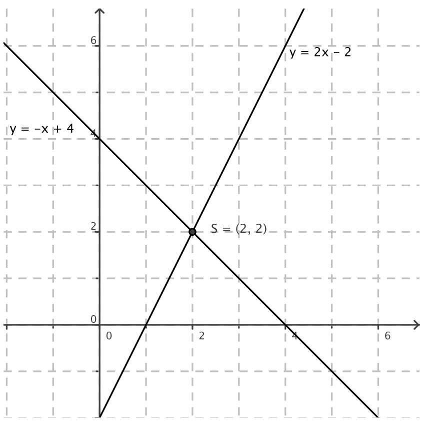
2.1 Lösungsfälle eines linearen 2×2 Gleichungssystems

Wir betrachten folgende drei 2×2 Gleichungssysteme:

(a)

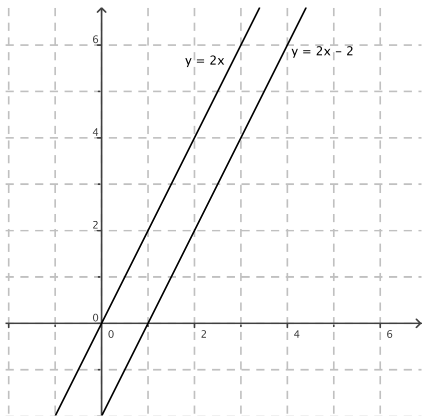
$$\begin{array}{r} 2x - y = 2 \\ x + y = 4 \\ \hline \end{array}$$

Die beiden Geraden *schneiden* einander, dh es gibt eine *eindeutige* Lösung: $\mathbb{L} = \{(2, 2)\}$



(b)

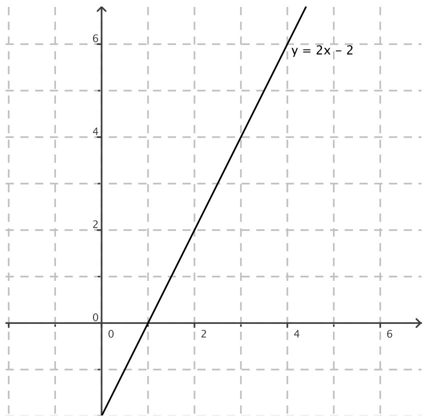
$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ x - \frac{1}{2}y &= 0 \end{aligned}$$



Die beiden Geraden sind *parallel*, haben also keinen Punkt gemeinsam, daher gibt es *keine Lösung*: $\mathbb{L} = \{\}$

(c)

$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ x - \frac{1}{2}y &= 1 \end{aligned}$$



Die beiden Geraden fallen zusammen (sie sind *identisch*), sie haben *unendlich viele Schnittpunkte* und es gibt daher *unendlich viele Lösungen*.

Eine lineares 2×2 Gleichungssystem hat entweder

- **genau eine** Lösung oder
- **keine** Lösung oder
- **unendlich viele** Lösungen.

2.2 Rechnerische Verfahren zum Lösen von Gleichungssystemen

2.2.1 Einsetzungsverfahren

Beim Einsetzungsverfahren löst man eine der beiden Gleichungen nach einer Variable auf und setzt den erhaltenen Term für diese Variable in der anderen

Gleichung ein:

$$\begin{array}{rr} 3x - 2y = 5 & \text{(I)} \\ \underline{2x + 5y = 16} & \text{(II)} \end{array}$$

Wir lösen zB (II) nach x auf:

$$x = 8 - \frac{5}{2}y \qquad (\star)$$

Diesen Term setzen wir nun statt x in (I) ein und lösen die Gleichung nach y:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \left(8 - \frac{5}{2}y\right) - 2y &= 5 \\ 24 - \frac{15}{2}y - 2y &= 5 \qquad | \cdot 2 \\ 48 - 15y - 4y &= 10 \\ -19y &= -38 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Wir setzen $y = 2$ in $(\star)$ ein und erhalten damit x:

$$x = 8 - \frac{5}{2} \cdot 2 = 3$$

Damit ist $\mathbb{L} = \{(3, 2)\}$.

2.2.2 Gauß'sches Eliminationsverfahren (Additionsverfahren)

Beim Gauß'schen Eliminationsverfahren multipliziert man eine oder beide Gleichungen so mit einer Zahl, dass nach dem Addieren der beiden Gleichungen eine der beiden Variablen wegfällt. Wir werden hier y eliminieren:

$$\begin{array}{rcrcrl} 3x & - & 2y & = & 5 & | \cdot 5 \\ 2x & + & 5y & = & 16 & | \cdot 2 \\ \hline 15x & - & 10y & = & 25 & + \\ 4x & + & 10y & = & 32 & + \\ \hline 19x & + & 0 & = & 57 & \\ x & & & = & 3 & \end{array}$$

$x = 3$ setzt man nun entweder in die erste oder zweite Gleichung ein und erhält dadurch y:

$$3 \cdot 3 - 2y = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

Daraus folgt: $\mathbb{L} = \{(3, 2)\}$

2.2.3 Gleichsetzungsverfahren

Beim Gleichsetzungsverfahren drückt man in beiden Gleichungen die selbe Variable aus und setzt diese gleich:

$$\begin{array}{rr} 3x - 2y = 5 & \text{(I)} \\ 2x + 5y = 16 & \text{(II)} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} x = \dfrac{5+2y}{3} & \text{(I)} \\ x = \dfrac{16-5y}{2} & \text{(II)} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} x &= x \\ \Rightarrow \quad \frac{5+2y}{3} &= \frac{16-5y}{2} \\ 10 + 4y &= 48 - 15y \\ 19y &= 38 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Setzen wir $y = 2$ entweder in (I) oder (II) ein, erhalten wir x:

$$\begin{aligned} x &= \frac{5 + 2 \cdot 2}{3} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Wieder ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(3,2)\}$

2.2.4 Einführen neuer Variablen

Betrachten wir das folgende (nicht-lineare) Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rr} \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} = 0 & \text{(I)} \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{7}{y} = 3 & \text{(II)} \\ \hline \end{array}$$

Obwohl das Gleichungssystem kein lineares Gleichungssystem ist, läßt es sich durch einen „Trick“ in ein lineares umwandeln. Wir setzen $a = \frac{1}{x},\ b = \frac{1}{y}$ und erhalten:

$$\begin{array}{rr} 2a - b = 0 & \text{(I)} \\ 4a + 7b = 3 & \text{(II)} \\ \hline \end{array}$$

Löst man dieses neue Gleichungssystem (auf eine beliebige Art) erhält man:

$$a = \frac{1}{6}$$
$$b = \frac{1}{3}$$

Nun ist aber $a = \frac{1}{x}$ und $b = \frac{1}{y}$, daher gilt: $x = 6$ und $y = 3$ bzw. $\mathbb{L} = \{(6, 3)\}$.

2.3 Die Fälle „keine Lösung“ und „unendlich viele Lösungen“ rechnerisch

Wir betrachten wieder die Gleichungssysteme (b) und (c) aus Kap. 2.1 von Seite 4:

(b)

$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \qquad &\text{(I)} \\ x - \frac{1}{2}y &= 0 \qquad &\text{(II)} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \qquad &\text{(I)} \\ x - \frac{1}{2}y &= 1 \qquad &\text{(II)} \end{aligned}$$

Wir lösen (b) mit dem Einsetzungsverfahren: (II): $y = 2x$
Dies in (I) eingesetzt:

$$\begin{aligned} 2x - 2x &= 2 \\ 0 &= 2 \end{aligned}$$

Dies ist eine *falsche Aussage*, daher gibt es *keine Lösung.* (Wie wir aus Kap. 2.1 auf Seite 4 wissen, sind die beiden entsprechenden Geraden parallel.)

Wir lösen nun (c) mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren:

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x & - & y & = & 2 & \\ x & - & \frac{1}{2}y & = & 1 & \mid \cdot (-2) \\ \hline 2x & - & y & = & 2 & \\ -2x & + & y & = & -2 & \\ \hline & & 0 & = & 0 & \end{array}$$

Dies ist eine *wahre Aussage*, daher gibt es *unendlich viele Lösungen.* (Wie wir wissen, sind die beiden entsprechenden Geraden identisch.)

Wir können die Arten der Schlusszeile, die beim Lösen eines Gleichungssystems entsteht, und deren Bedeutung in einer Übersicht darstellen:

Beispiel	**allgemein**	**Bedeutung**
$x = 5$	x bzw. y haben einen Wert	eindeutige Lösung
$0 = 2$	falsche Aussage	keine Lösung
$0 = 0$	wahre Aussage	unendlich viele Lösungen

3 Textaufgaben

Die Textaufgaben aus dem Kapitel „Gleichungen“ können erweitert bzw. auch (statt mit nur einer) mit zwei Unbekannten betrachtet werden. So z.B. folgende Mischungsaufgabe:

Beispiel:
Wie viel 20-%igen und 45-%igen Alkohol muss man mischen, um 500 ml 35-%igen Alkohol zu bekommen?

Lösung:
Wir betrachten folgende Übersicht:

Mischung	Prozent	Menge	absolute Menge Alkohol
20-%ig 45-%ig	20 45	x y	$\frac{20 \cdot x}{100}$ $\frac{45 \cdot y}{100}$
35-%ig	35	500	$\frac{35 \cdot 500}{100}$

Es ergeben sich folgende zwei Gleichungen:

$$x + y = 500 \qquad \text{(I)}$$
$$\frac{20 \cdot x}{100} + \frac{45 \cdot x}{100} = \frac{35 \cdot 500}{100} \qquad \text{(II)}$$

Wir vereinfachen die Gleichung (II) etwas und lösen das Gleichungssystem:

$$x + y = 500 \qquad \text{(I)}$$
$$20x + 45x = 17500 \qquad \text{(II)}$$

$$x + y = 500 \qquad \text{(I)}$$
$$4x + 9x = 3500 \qquad \text{(II)}$$

...
Die Lösung ergibt $x = 200$ und $y = 300$, d.h. man benötigt 200 ml 20-%igen Alkohol und 300 ml 35-%igen Alkohol.

4 Lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Variablen (3×3)

Das Vorgehen zur Lösung eines 3×3 Gleichungssystems ist grundsätzlich gleich zu einem 2×2 Gleichungssystem. Die dabei am häufigsten eingesetzte Methode (neben Computeralgorithmen) ist das Gauß'sche Eliminationsverfahren (Additionsverfahren). z.B.:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{(I)} & 4x & + & 5y & - & z & = & 11 \\
\text{(II)} & 2x & + & 3y & + & 2z & = & 14 \\
\text{(III)} & x & - & y & + & 3z & = & 8 \\
\hline
\end{array}
$$

Wir gehen dabei so vor:

1. Wir nehmen zwei Gleichungen und multiplizieren eine oder beide so mit einer Zahl, dass bei Addition der beiden Gleichungen eine Variable wegfällt.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\text{(I)} & 4x & + & 5y & - & z & = & 11 & |\cdot 2 \\
\text{(II)} & 2x & + & 3y & + & 2z & = & 14 & \\
\hline
\text{(I)} & 8x & + & 10y & - & 2z & = & 22 & \\
\text{(II)} & 2x & + & 3y & + & 2z & = & 14 & \\
\hline
(\star) & 10x & + & 13y & & & = & 36 &
\end{array}
$$

2. Wir nehmen zwei andere Gleichungen und wiederholen Punkt 1 (allerdings eliminieren wir die *selbe* Variable!)

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\text{(I)} & 4x & + & 5y & - & z & = & 11 & |\cdot 3 \\
\text{(III)} & x & - & y & + & 3z & = & 8 & \\
\hline
\text{(I)} & 12x & + & 15y & - & 3z & = & 33 & \\
\text{(III)} & x & - & y & + & 3z & = & 8 & \\
\hline
(\star\star) & 13x & + & 14y & & & = & 41 &
\end{array}
$$

3. Wir bekommen dadurch ein 2×2 Gleichungssystem, das wir wie gewohnt lösen.

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
(\star) & 10x & + & 13y & = & 36 & |\cdot(-14) \\
(\star\star) & 13x & + & 14y & = & 41 & |\cdot 13 \\
\hline
(\star) & -140x & - & 182y & = & -504 & \\
(\star\star) & 169x & + & 182y & = & 533 & \\
\hline
 & 29x & & & = & 29 & |: 29 \\
 & x & & & = & 1 &
\end{array}
$$

Setzen wir $x = 1$ in $(\star)$ ein, erhalten wir y:

$$\begin{aligned} 10 + 13y &= 36 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Und setzen wir $x = 1$ und $y = 2$ in (III) ein, erhalten wir z:

$$\begin{aligned} 1 - 2 + 3z &= 8 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

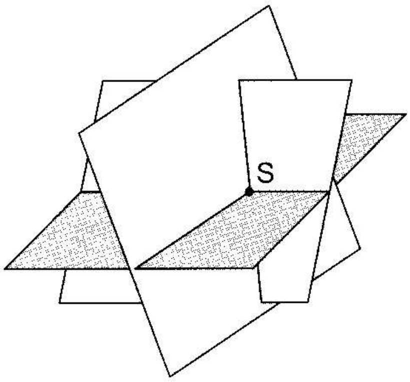
Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems lautet: $\mathbb{L} = \{(1, 2, 3)\}$

Anmerkung:
Lineare 3×3 Gleichungssysteme haben entweder

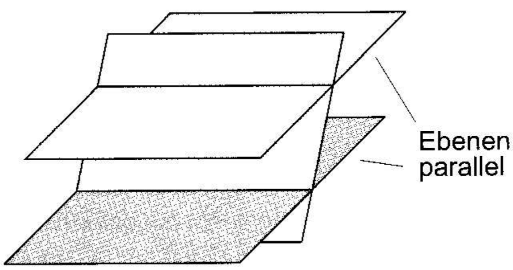
- **genau eine** Lösung
- **keine** Lösung oder
- **unendlich viele** Lösungen

Interpretiert man 3×3 Gleichungssysteme grafisch, entspricht *jede Gleichung einer Ebene im Raum*. So kann es die folgenden Lösungsfälle geben (die dritte Möglichkeit sind drei identische Ebenen - also unendlich viele Lösungen):

Genau eine Lösung (Punkt):



Keine Lösung:



Inhaltsverzeichnis