Kosten- und Preistheorie

Mag. Martin Bruckbauer

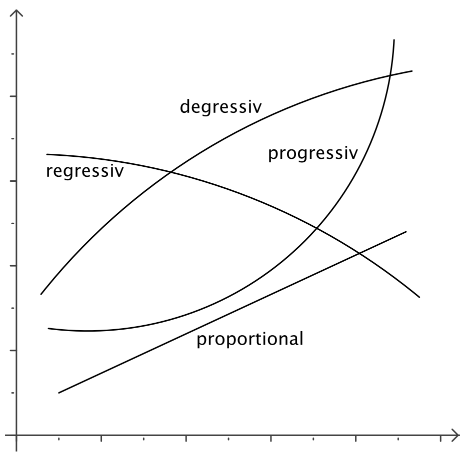
8. November 2005

1 Kostenfunktion

Unter *Kosten* versteht man im Allgemeinen den *in Geld bewerteten Güterverzehr, der für die Erstellung betrieblicher Leistungen anfällt.* Vom mathematischen Standpunkt interessiert uns vor allem der *Kostenverlauf*, das heißt das Verhalten der Kosten bei unterschiedlichem Beschäftigungsgrad. Hierbei gibt es *variable* (Fertigungslöhne, Rohstoffkosten) und *fixe Kosten* (Anlageabschreibung, Personalkosten für leitende Angestellte usw.). Die Gesamtkosten setzen sich daher aus variablen und fixen Kosten zusammen:

$$K(x) = K_v(x) + K_f$$

1.1 Kostenverläufe



Kosten können auf folgende Weise verlaufen:

- *proportional*: gleichlaufende Veränderung - lineare Funktion
- *progressiv*: Kosten steigen schneller als Beschäftigungsgrad
- *degressiv*: Kosten wachsen langsamer als Beschäftigungsgrad
- *regressiv*: Kosten sinken mit steigendem Beschäftigungsgrad

1.2 Aufstellen einer Funktionsgleichung mittels Regression

Meist kennt man die Gesamtkosten nur an einigen (wenigen) Stellen. Man versucht aus diesen bekannten Werten ein mathematisches Modell zu finden, dass den Verlauf der Kosten (Kostenfunktion) am besten beschreibt.

Man verwendet hierfür die *Methode der kleinsten Quadrate*. Man ermittelt dabei jene lineare, quadratische, kubische, ... Funktion $K^*(x)$, für die die *Summe der Quadrate der Abweichungen* vom realen Wert ($K(x)$) möglichst klein ist. D.h. folgender Wert soll möglichst klein sein:

$$(K^*(x_1) - K(x_1))^2 + (K^*(x_2) - K(x_2))^2 + \cdots + (K^*(x_n) - K(x_n))^2 = \sum_{i=1}^{n} (K^*(x_1) - K(x_1))^2$$

Dieses Minimum werden wir mit Hilfe der Differentialrechnung finden.

Beispiel

Die Abhängigkeit der Gesamtkosten $K(x)$ eines Betriebs vom Beschäftigungsgrad x wurde für einige Werte x_i empirisch ermittelt:

x_i	0	10	20	30	40	50	60
$K(x_i) = y_i$	50	80	100	110	115	125	150

Es soll eine (a) lineare Funktion (b) quadratische Funktion (c) kubische Funktion ermittelt, werden, die den gegebenen Verlauf am besten wiedergibt.

(a) Lineare Funktion

Unsere Kostenfunktion soll durch eine Funktion der Form $K^*(x) = ax + b$ angenähert werden. Nach der Methode der kleinsten Quadrate muss

$$\sum_{i=1}^{n} (K^*(x_1) - K(x_1))^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

ein Minimum werden.
Hier liegt die Funktion

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

mit zwei Variablen vor, von der wir die partiellen Ableitungen nach a und b bilden und diese gleich 0 setzen:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta F}{\Delta a} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) \cdot x_i \\
0 &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) \cdot x_i \\
0 &= \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i - x_i y_i) \\
0 &= a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
\sum_{i=1}^{n} x_i y_i &= a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta F}{\Delta b} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) \\
0 &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) \\
0 &= a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} b - \sum_{i=1}^{n} y_i \\
\sum_{i=1}^{n} y_i &= a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n
\end{aligned}$$

Wir müssen folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i y_i &= a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \\
\sum_{i=1}^{n} y_i &= a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n
\end{aligned}$$

In unserem Beispiel ist

$$\sum_{i=1}^{7} x_i = 0 + 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 = 210$$

$$\sum_{i=1}^{7} y_i = 50 + 80 + 100 + 110 + 115 + 125 + 150 = 730$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 0 + 100 + 400 + 900 + 1600 + 2500 + 3600 = 9100$$

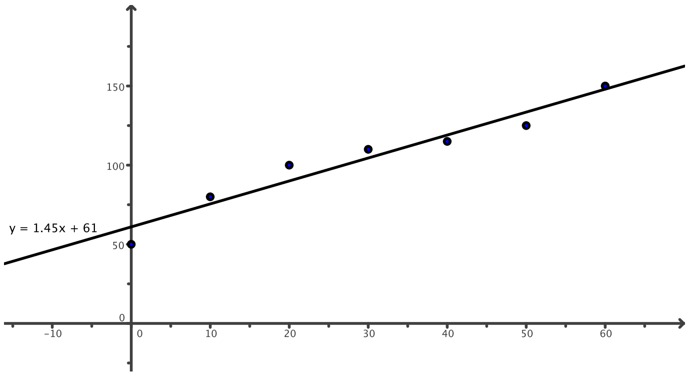
$$\sum_{i=1}^{7} x_i y_i = 0 \cdot 50 + 10 \cdot 80 + 20 \cdot 100 + 30 \cdot 110 + 40 \cdot 115 + 50 \cdot 125 + 60 \cdot 150$$
$$= 25950$$

Unser Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} 25950 &= 9100a + 210b \\ 730 &= 210a + 7b \end{aligned}$$

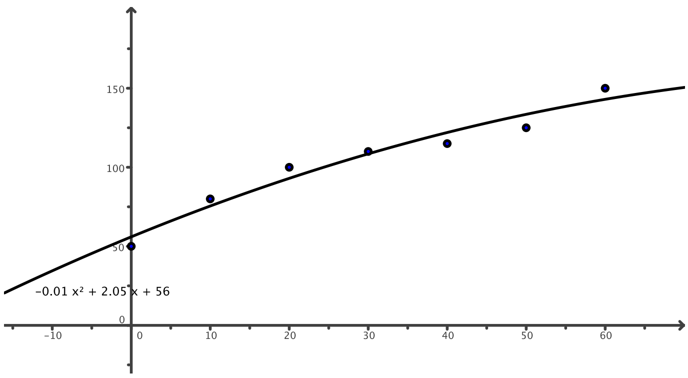
$\Rightarrow a \approx 1,45;\ b \approx 60,89$ und unsere Kostenfunktion lautet:

$$K^*(x) \approx 1,45x + 61$$



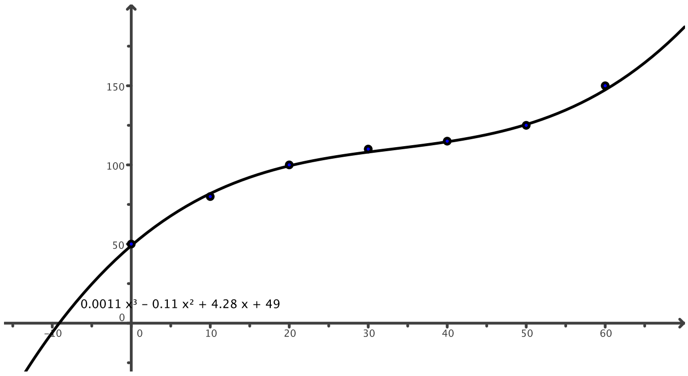
(b) Quadratische Funktion
Aufgrund analoger Berechnungen mit $K^*(x) = ax^2 + bx + c$ kommt man auf

$$K^*(x) \approx -0,01x^2 + 2,05x + 56$$



(c) Kubische Funktion
Ebenso führt $K^*(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ auf

$$K^*(x) \approx 0,0011x^3 - 0,11x^2 + 4,28x + 49$$

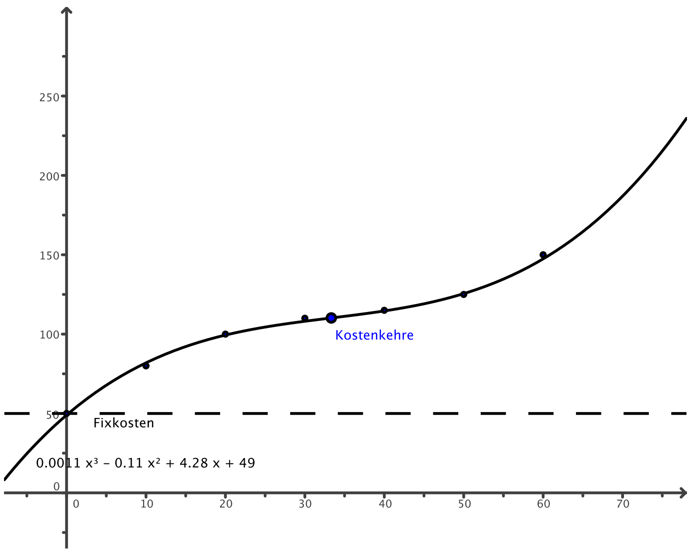


Hier ist gut erkennbar, dass die kubische Näherung die reale Kostenfunktion am besten wiedergibt.

1.3 Interpretation einer Kostenfunktion

Die Grafik zeigt das typische Verhalten einer Kostenfunktion dritten Grades:

$$K^*(x) \approx 0,0011x^3 - 0,11x^2 + 4,28x + 49$$



- Bei Anlauf der Produktion kommt es zu einem starken Anstieg der Gesamtkosten, weil die variablen Kosten stark steigen. Der gesamte Betrieb muss arbeiten, obwohl Maschinen und Arbeiter nicht ausgelastet sind.
- Der Anstieg der Gesamtkosten verringert sich mit wachsender Produktion (bessere Auslastung der Kapazitäten). Die Gesamtkosten sind *degressiv*.

- Steigt die Produktion weiter, wird der *Wendepunkt* der Funktion erreicht, bei der der Anstieg der Kostenfunktion wieder wächst. Der Betrieb wird überlastet, as Zusatzkosten (z.B. Überstunden) verursacht. Die Kostenfunktion wird *progressiv.*

> Die *Kostenkehre* ist die Erzeugermenge x_k, bei der die Gesamtkostenfunktion ihren *Wendepunkt* hat:
>
> $$\text{Kostenkehre } x_k : \quad K''(x_k) = 0$$

In unserem Beispiel:

$$\begin{aligned} K''(x) &= 0,0066x - 0,22 \\ K''(x) &= 0 \\ x &= 33,33 \\ K(33,33) &= 110,19 \end{aligned}$$

Die Kostenkehre liegt hier bei 33,33 ME.

1.4 Stückkosten und Betriebsoptimum

Für die Produktionsplanung ist auch die Frage nach der *kostengünstigsten Produktmenge* von wesentlicher Bedeutung.
Wir betrachten wieder die Kostenfunktion

$$K(x) = 0,0011x^3 - 0,11x^2 + 4,28x + 49$$

Um die Kosten pro Stück zu ermitteln, müssen wir die Gesamtkosten $K(x)$ durch die Stückzahl x dividieren:

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{K(x)}{x} \\ k(x) &= 0,0011x^2 - 0,11x + 4,28 + \frac{49}{x} \end{aligned}$$

Für diese *Stückkostenfunktion* $k(x)$ suchen wir das Minimum, also jene Produktionsmenge x, für die die Stückkosten am geringsten sind:

$$\begin{aligned} k'(x) &= 0 \\ 0,0022x - 0,11 - \frac{49}{x^2} &= 0 \qquad | \cdot x^2 \\ 0,0022x^3 - 0,11x^2 - 49 &= 0 \\ &\Rightarrow x \approx 57 \end{aligned}$$

Die dazugehörigen Stückkosten berechnet man so:

$$k(57) = 0,0011 \cdot 57^2 - 0,11 \cdot 57 + 4,28 + \frac{49}{57} \approx 2,44$$

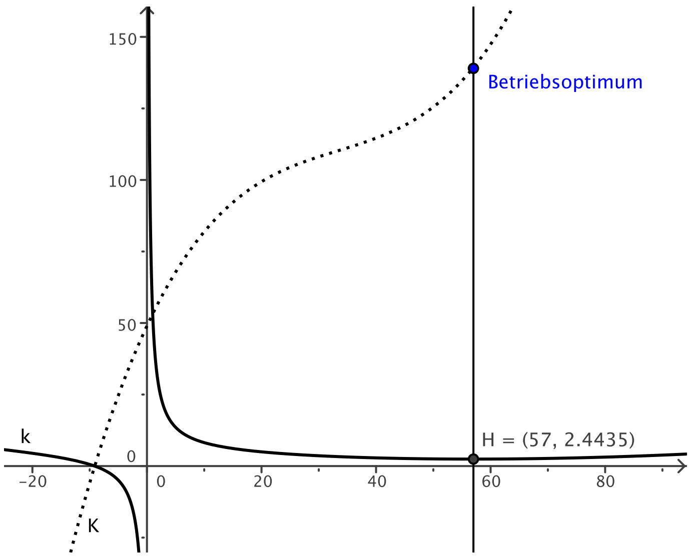
Die Produktionskosten pro Stück sind für $x \approx 57$ ME am geringsten und betragen ca. 2,44 GE.

Anmerkung: Man nennt die kostengrünstigste Produktionsmenge, also die Menge x_{opt}, für die *Kosten pro Stück* am geringsten sind, *Betriebsoptimum.* Das Betriebsoptimum wird berechnet durch

$$k'(x) = 0$$

wobei $k(x) = \dfrac{K(x)}{x}$ (Stückkostenfunktion).

Der Wert $k(x_{\text{opt}})$ wird auch *langfristige Preisuntergrenze* genannt.



1.5 Variable Stückkosten und Betriebsminimum

Auf lange Sicht sind die kritischen Werte für die Herstellung eines Produkts das *Betriebsoptimum* und die *langfristige Preisuntergrenze.* Manchmal wird es aber notwendig sein, Produkte zu einem Preis anzubieten, der der Gesamtkosten nicht mehr abdeckt. Dies ist vertretbar, wenn mit einer baldigen Kostensenkung oder Preissteigerung zu rechnen ist. Das bedeutet, dass der Verkaufspreis mindestens so groß sein muss, wie die *variablen Stückkosten*:

$$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$$

Anmerkung: Das *Betriebsminimum* ist die Erzeugungmenge $x_{\min}$, für die die *variablen Stückkosten* minimal sind und wird berechnet durch:

$$k_v'(x) = 0$$

wobei $k_v(x) = \dfrac{K_v(x)}{x}$ (variable Stückkostenfunktion).

Der Wert $k_v(x_{\min})$ wird auch *kurzfristige Preisuntergrenze* genannt.

Beispiel
Die Gesamtkostenfunktion eines Betriebes sei $K(x) = x^3 - 4x^2 + 20x + 40$. Ermittle rechnerisch und graphisch

- Das Betriebsoptimum x_{opt} und die langfristige Preisuntergrenze, sowie
- das Betriebsminimum $x_{\min}$ und die kurzfristige Preisuntergrenze.

$$\begin{array}{ll}
K_f = 40 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{fixe Gesamtkosten} \\
K_v(x) = x^3 - 4x^2 + 20x & \text{variable Gesamtkosten} \\
k(x) = x^2 - 4x + 20 + \dfrac{40}{x} & \text{Stückkosten} \\
k'(x) = 2x - 4 - \dfrac{40}{x^2} & \\
k_v(x) = x^2 - 4x + 20 \;\ldots & \text{variable Stückkosten} \\
k_v'(x) = 2x - 4 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
k'(x) &= 0 \\
\Rightarrow \quad x_{\text{opt}} &= 3,57 \text{ ME (Betriebsoptimum)} \\
\Rightarrow \quad k(x_{\text{opt}}) &= 29,67 \text{ GE (langfr. PreisUG)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_v'(x) &= 0 \\
\Rightarrow \quad x_{\min} &= 2 \text{ ME (Betriebsminimum)} \\
\Rightarrow \quad k_v(x_{\min}) &= 16 \text{ GE (kurzfr. PreisUG)}
\end{aligned}$$

1.6 Grenzkosten

Vielfach ist es notwendig, den bei Steigerung der Produktion den *durchschnittlichen Kostenzuwachs* anzugeben. Wir wissen aus der Differentialrechnung, dass eine durchschnittliche Änderung einer Funktion durch den *Differenzenquotienten* bzw. den *Differentialquotienten* gegeben ist. Wir also die

Produktion von x_1 auf x_2 gesteigert, erhält man den durchschnittlichen Kostenzuwachs durch

$$\frac{K(x_2) - K(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Oft wird auch einfach der Differentialquotient, also die 1. Ableitung, verwendet.

Anmerkung: Man nennt $K'(x)$ (also die erste Ableitung der Gesamtkostenfunktion $K(x)$) auch *Grenzkostenfunktion*.

2 Angebot- und Nachfragefunktion

2.1 Angebotsfunktion

Das Angebotsverhalten eines Produzenten hängt vom erzielbaren Marktpreis ab. So wird ein Produzent aufgrund einer Kostenrechnung auf Basis von Betriebsminimum bzw -optimum einen Mindestpreis festlegen. Je höher der erzielbare Preis ist, desto mehr wird produziert werden. Daraus ergibt sich die Angebotsfunktion.

z.B.:
Von einem (oder) mehreren Produzenten werden Weingläser hergestellt. Das Produktions- bzw. Angebotsverhalten des Produzenten in Abhängigkeit vom Verkaufspreis ist aus folgender Tabelle ersichtlich:

p [GE]	140	160	180	190	200
x [100 Stk]	10	20	45	57	70

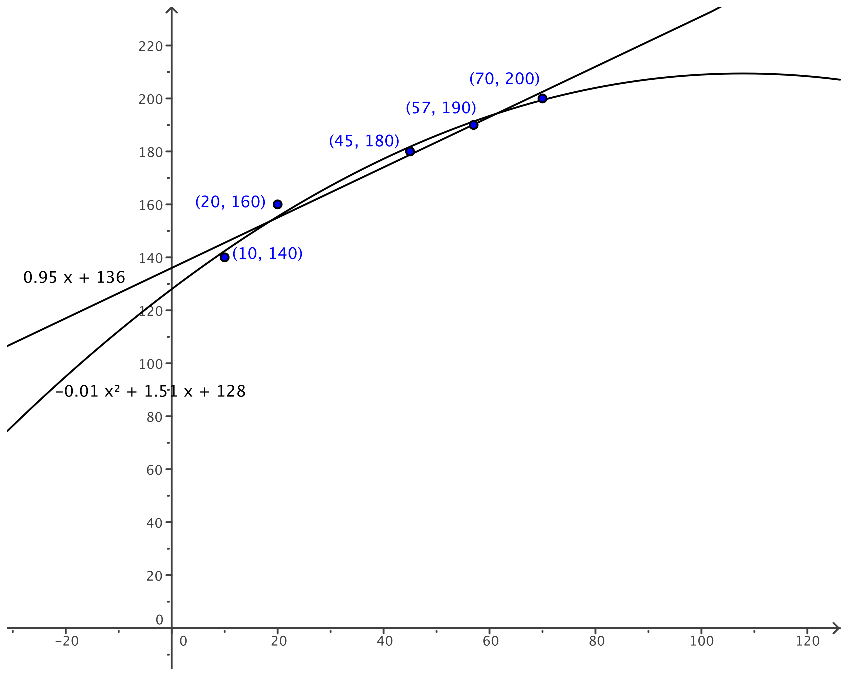
- Ermittle die Gleichung der (a) linearen (b) quadratischen Angebotsfunktion durch Regression (Methode der kleinsten Quadrate), die die Wertepaare am besten beschreibt!
- Bei welchem Preis ist ein Angebot von 5000 Stück zu erwarten?
- Mit welcher Angebotsmenge ist bei einem Preis von 170 GE zu rechnen?

Lösung:
Die Methode der kleinsten Quadrate führt uns auf die Angebotsfunktionen

$$a(x) \approx 0,95x + 136$$

bzw

$$a(x) \approx -0,007x^2 + 1,51x + 128$$



Wie man hier gut erkennen kann, ist die lineare Angebotsfunktion ausreichend.

Wir verwenden also für die Frage nach dem Preis bei 5000 Stück:

$$a(50) \approx 0,95 \cdot 50 + 136 = 183,5$$

Die Angebotsmenge bei einem Preis von 170 GE bekommt man durch:

$$\begin{aligned} 0,95x + 136 &= 170 \\ x &\approx 35,8 \quad \text{(d.h. ca. 3600 Stück)} \end{aligned}$$

2.2 Nachfragefunktion

Die Nachfrage der meisten Produkte hängt sehr stark von Preis ab. Im Allgemeinen sinkt die Nachfrage bei steigendem Preis. [1]

z.B.:
Die auf Seite 9 beschriebene Produktion von Weingläsern wird zum Verkauf angeboten. Das Nachfrageverhalten der Konsumenten sieht so aus:

p [GE]	140	160	180	190	200
x [100 Stk]	70	55	34	22	10

[1] Eine Ausnahme bildet der „Snob-Effekt“, bei dem Waren erst dann gekauft werden, wenn sie teuer sind. Der Käufer erhofft sich dadurch gesellschaftliche Anerkennung.

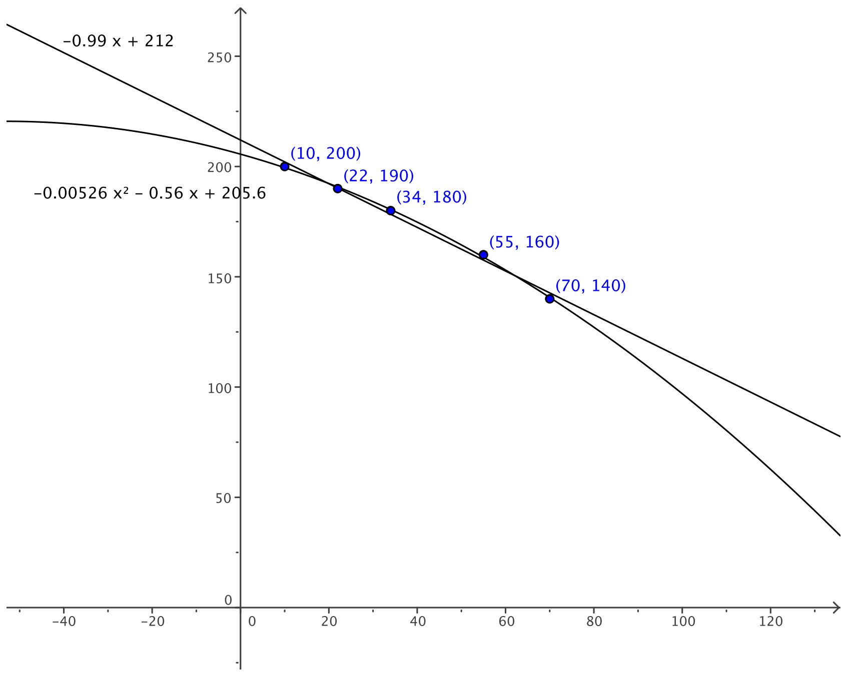
- Ermittle die Gleichung einer (a) linearen (b) quadratischen Nachfragefunktion, die die gegebenen Wertepaare möglichst gut beschreibt!
- Bei welchem Preis kann eine Nachfrage von 6000 Stück erwartet werden?
- Welche Nachfrage ist bei einem Preis von 170 GE zu erwarten?

Lösung:
Die Methode der kleinsten Quadrate führt uns auf:

$$n(x) \approx -0,99x + 212$$

bzw.

$$n(x) \approx -0,005x^2 - 0,561x + 205,6$$



Auch hier genügt uns die lineare Funktion, und wir erhalten den gesuchten Preis bei einer Nachfrage von 6000 Stück durch:

$$n(60) \approx -0,99 \cdot 60 + 212 = 152,6$$

Die gesuchte Nachfragemenge bei einem Preis von 170 GE ist:

$$\begin{aligned} -0,99x + 212 &= 170 \\ x &= 42,4 \quad \text{(d.h. ca. 4200 Stück)} \end{aligned}$$

Aus der Nachfragefunktion lassen sich auch der *Höchstpreis* und die *Sättigungsmenge* berechnen:

Der *Höchstpreis* ist gegeben durch

$$n(0) = ...$$

(Es sind nur wenig (theoretisch kein) Stück am Markt, daher ist der Preis am höchsten.)

Die *Sättigungsmenge* ist gegeben durch

$$n(x) = 0$$

(Es sind so viele Stück am Markt, dass der Preis 0 wird.)

2.3 Der Marktpreis

Auf einem (freien) Markt, ergibt sich durch das Wechselspiel von Angebot und Nachfrage der *Marktpreis*. Im Marktpreis stimmen angebotenen Mengen und die nachgefragten Mengen überein und der Markt ist „im Gleichgewicht“. Bei einem höheren Preis würde mehr angeboten werden, als verkauft würde (*Angebotsüberhang*), sodass die Preise gesenkt werden müssen, und bei einem niedrigerem Preis würde mehr verkauft als angeboten werden (*Nachfrageüberhang*) , sodass nicht alle Konsumenten die Ware in ausreichender Menge bekommen können, und der Preis steigt.

Der Marktpreis ergibt sich aus dem Schnittpunkt von Angebots- und Nachfragefunktion:

z.B.: Wir betrachten die Angebotsfunktion von Seite 9 und die Nachfragefunktion von Seite 11 und schneiden die beiden:

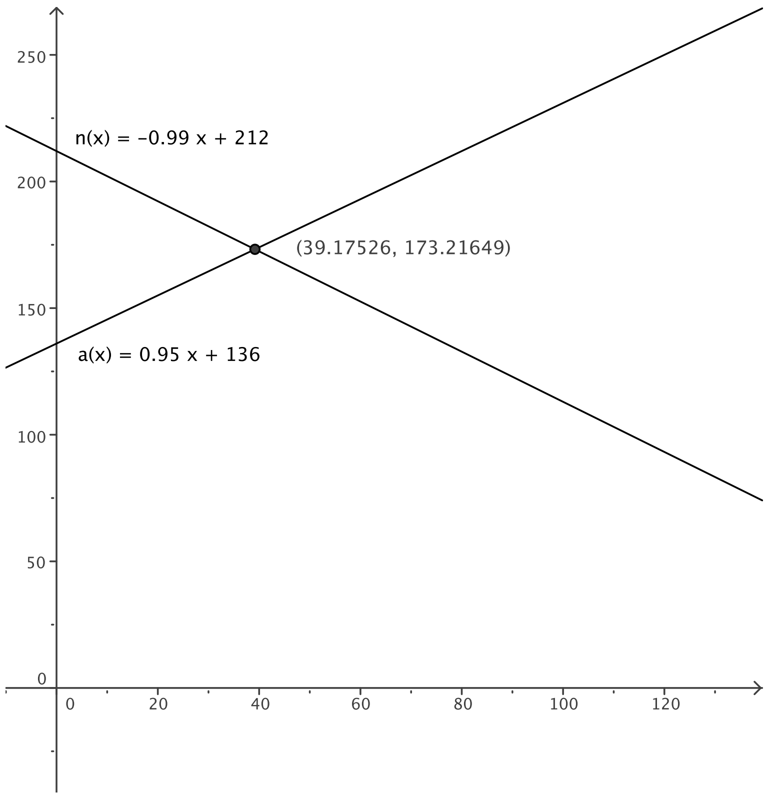
$$\begin{aligned} 0,95x + 136 &= -0,99x + 212 \\ 1,94x &= 76 \\ x &\approx 39 \end{aligned}$$

Der Preis ergibt sich aus:

$$0,95 \cdot 39 + 136 \approx 173$$

Das bedeutet, dass sich der Markt bei 3900 Stück und einem Preis von 173 GE im Gleichgewicht befindet (d.i. der *Marktpreis)*.

$$p: \quad n(x) = a(x)$$



3 Erlös- und Gewinnfunktion

Der Prozess der Preisbildung wird durch das Wechselspiel von Angebot und Nachfrage bestimmt. Dieses Modell gilt aus der Sicht *aller* Anbieter eines Produkts, sagt aber nichts über die Situation des *enzelnen* Anbieters aus. Wir müssen also in Folge zwischen einem einzigen Anbieter (*Monopolbetrieb*), der den Preis viel stärker beeinflussen kann, und *vielen Anbietern* unterscheiden.

3.1 Erlös-und Gewinnfunktion bei atomistischer Konkurrenz

Atomistische Konkurrenz bedeutet *vollständige Konkurrenz*. Das bedeutet, dass viele Anbieter ein Produkt am Markt anbieten.

Für den einzelnen Anbieter ist der Marktpreis p eine feste Größe und nur der **Erlös** ist nur von der angebotenen und abgesetzten Menge x abhängig:

Definitionen:
Sei p der Marktpreis und x die angebotene und abgesetzte Menge eines Produkts, so bezeichnet man als

- *Erlösfunktion*:
$$E(x) = p \cdot x$$
- *Gewinnfunktion*:
$$G(x) = E(x) - K(x)$$
- *Gewinnschwellen*: diejenigen Werte x_1 und x_2, für die gilt:
$$G(x) > 0 \quad \text{in } [x_1; x_2]$$
bzw.
$$K(x) = E(x)$$
- *Grenzbetrieb*: einen Betrieb für den gilt:
$$x_1 = x_2$$
(D.h. dieser Betrieb kann nur bei einer einzigen Produktionsmenge (im Betriebsoptimum) kostendeckend arbeiten.)

Anmerkung: Man berechnet den *maximalen Gewinn* durch

$$\begin{aligned} G'(x) &= 0 \qquad \text{oder} \\ E'(x) - K'(x) &= 0 \qquad \text{oder} \\ E'(x) &= K'(x) \end{aligned}$$

Beispiel:
Ein Betrieb hat die Kostenfunktion

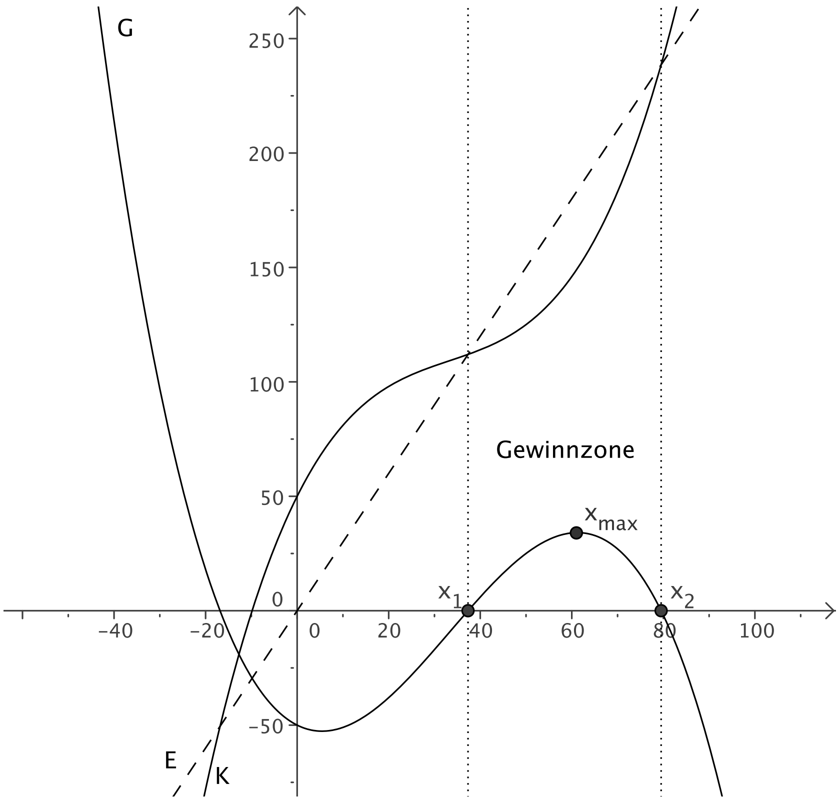
$$K(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}1x^2 + 4x + 50$$

Berechne

- die Gewinnschwellen und
- den maximalen Gewinn bei einem Marktpreis von $p = 3$ GE!
- Bestimme, für welchen Verkaufspreis der Betrieb zum Grenzbetrieb wird!

Lösung:

$$\begin{aligned} K(x) &= 0,001x^3 - 0,1x^2 + 4x + 50 \\ E(x) &= 3x \\ K'(x) &= 0,003x^2 - 0,2x + 4 \\ E'(x) &= 3 \end{aligned}$$



Gewinnschwellen:

$$\begin{aligned} K(x) &= E(x) \\ 0,001x^3 - 0,1x^2 + 4x + 50 &= 3x \\ 0,001x^3 - 0,1x^2 + x + 50 &= 0 \\ x_1 &\approx -17 \qquad \text{(unbrauchbar)} \\ x_2 &\approx 38 \qquad \text{(immer aufrunden!)} \\ x_3 &\approx 79 \qquad \text{(immer abrunden!)} \end{aligned}$$

Maximaler Gewinn:

$$\begin{aligned}
K'(x) &= E'(x) \\
0,003x^2 - 0,2x + 4 &= 3 \\
0,003x^2 - 0,2x + 1 &= 0 \\
x_1 &\approx 5 \\
&\quad \text{(nicht im Gewinnintervall [38;79]!)} \\
x_2 = x_{\max} &\approx 61 \text{ ME}
\end{aligned}$$

Der *maximale Gewinn* beträgt daher:

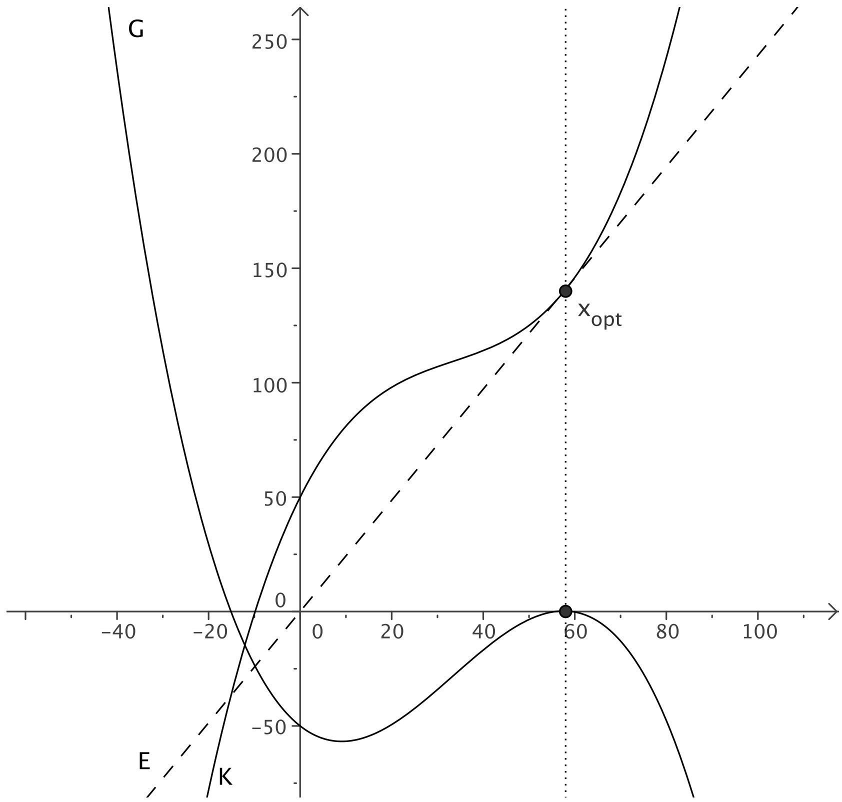
$$E(61) - K(61) \approx 34 \text{ GE}$$

Grenzbetrieb:
Wir benötigen dafür das Betriebsoptimum. Das Betriebsoptimum kann entweder durch $k'(x) = 0$ (vgl. Seite 8) oder auch durch

$$k(x) = K'(x)$$

berechnen:

$$\begin{aligned}
k(x) &= K'(x) \\
0,001x^2 - 0,1x + 4 + \frac{50}{x} &= 0,003x^2 - 0,2x + 4 \\
&\cdots \\
x_{\text{opt}} &\approx 58 \\
p = k(58) &\approx 2,4
\end{aligned}$$



Wie aus der Grafik erkennbar ist, schrumpft bei einem Grenzbetrieb die Gewinnzone auf einen Punkt zusammen.

3.2 Erlös-und Gewinnfunktion bei einem Monopolbetrieb

Zum Unterschied eines Anbieters bei vollständiger Konkurrenz, kann der Monopolist den Preis selbst bestimmen. Doch auch für ihn ist es nicht ratsam den Preis sehr hoch zu halten, da dann die Nachfrage sinken würde. Der Preis hängt daher rein von der *Nachfrage* ab. D.h. der Unterschied zur vollständigen Konkurrenz liegt darin, dass gilt:

$$\boxed{E(x) = n(x) \cdot x}$$

Beispiel:
Die Nachfrage für eine Ware sei durch $n(x) = -2x + 6$ gegeben.

1. Ermittle die Gleichung der Erlösfunktion.
2. Bei welchem Umsatz ist der Erlös maximal?
3. Wie groß ist dabei der Erlös?

$$
\begin{aligned}
E(x) &= n(x) \cdot x = -2x^2 + 6x \\
E'(x) &= -4x + 6 \\
0 &= -4x + 6 \\
x &= \frac{3}{2} \text{ ME (für max. Erlös)} \\
E\left(\frac{3}{2}\right) &= 4,5 \text{ GE } (= \text{max. Erlös})
\end{aligned}
$$

Anmerkung:

- Die Produktmenge c, bei der der maximale Gewinn erzielt wird, heißt *cournot'sche Menge.*
- Der Preis $p(c) = n(c)$ heißt *cournot'scher Preis.*
- Der Punkt $P_c(c|n(c))$ heißt *cournot'scher Punkt.*

Verkauft ein Monopolbetrieb ein Produkt zum Preis $n(a)$, dann wird die Menge a abgesetzt und der Gewinn wird maximal.