Integralrechnung

Mag. Martin Bruckbauer

29. Januar 2006

1 Stammfunktion

1.1 Einführung

In der Differentialrechnung haben wir Ableitungen von Funktionen berechnet. In der Integralrechnung gehen wir umgekehrt vor: wie bilden aus der Ableitung die ursprüngliche Funktion, die *Stammfunktion*.

Beispiel:
Ein Auto beschleunigt aus dem Stand heraus, wobei seine Geschwindigkeit annäherund gleichmäßig um 2 m/s zunimmt und seine Geschwindigkeit daher durch

$$v(t) = 2t$$

gegeben ist.

Frage: Wie groß ist nun der *zurückgelegte Weg* in den ersten t Sekunden nach dem Start?

Lösung:
Wir wissen, dass die Geschwindigkeit $v(t)$ durch die Ableitung der Zeit-Weg-Funktion $s(t)$ gegeben ist. Also gilt:

$$v(t) = s'(t) = 2t$$

Für welche Funktion s gilt also $s'(t) = 2t$? Dies gilt offensichtlich für die Funktion

$$s(t) = t^2$$

allerdings auch für jede Funktion

$$s(t) = t^2 + c$$

wobei c eine beliebige reelle Zahl ist.

Welche dieser (unendlich vielen) Funktionen die richtige ist, erkennen wir aus einer weiteren Eigenschaft, die $s(t)$ besitzen muss: Zum Zeitpunkt 0 ist der zurückgelegte Weg auch 0, was bedeutet, dass gilt:

$$s(0) = 0$$

Also gilt hier:

$$c = 0$$

und unsere gesuchte Funktion lautet:

$$s(t) = t^2$$

Der zurückgelegte Weg in den ersten t Sekunden ist $s(t) = t^2$

$s(t)$ ist hier die *Stammfunktion* von $s'(t)$. Allgemein:

Definition: Ist f eine reelle Funktion, dann heißt eine reelle Funktion F eine *Stammfunktion* von f, wenn gilt:

$$F' = f$$

Wie wir gesehen haben, gilt:

Ist F Stammfunktion von f, dann ist auch $F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f.

1.2 Berechnung der Stammfunktion

Bei der Berechnung der Ableitung von Potenzfunktionen haben wir den Exponenten der Hochzahl um 1 verringert und die Funktion mit diesem Exponenten multipliziert. Da die Bestimmung der Stammfunktion die *Umkehrung* der Bestimmung der Ableitung ist, lautet die

Rechenregel zur Bestimmung der Stammfunktion von Polynomfunktionen:

$$f(x) = x^n$$
$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

wobei $n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

Insbesondere gilt:

- $f(x) = k \qquad \Rightarrow \qquad F(x) = kx$

- $k \cdot F(x)$ ist Stammfunktion von $k \cdot f(x)$
- Wie bei der Differentation gilt auch hier die Summenregel: sind F und G Stammfunktionen von f und g, dann ist $(F+G)$ Stammfunktion von $(f+g)$

Beispiele: Bestimme $F(x)$!

- $f(x) = x \qquad F(x) = \frac{x^2}{2}$
- $f(x) = 3 \qquad F(x) = 3x$
- $f(x) = x^5 \qquad F(x) = \frac{x^6}{6}$
- $f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad F(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}$
- $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2 \qquad F(x) = \frac{x^5}{5} + x^4 - 2x$

Wie wir gesehen haben, ist die Stammfunktion $F(x)$ nicht eindeutig. Außer wir kennen einen bestimmten Wert von F:

$$f(x) = x^2 - 5 \qquad F(1) = 2$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^3}{3} - 5x + c \\ F(1) &= 2 \\ \frac{1^3}{3} - 5 + c &= 2 \\ \Rightarrow c &= \frac{20}{3} \\ \Rightarrow F(x) &= \frac{x^3}{3} - 5x + \frac{20}{3} \end{aligned}$$

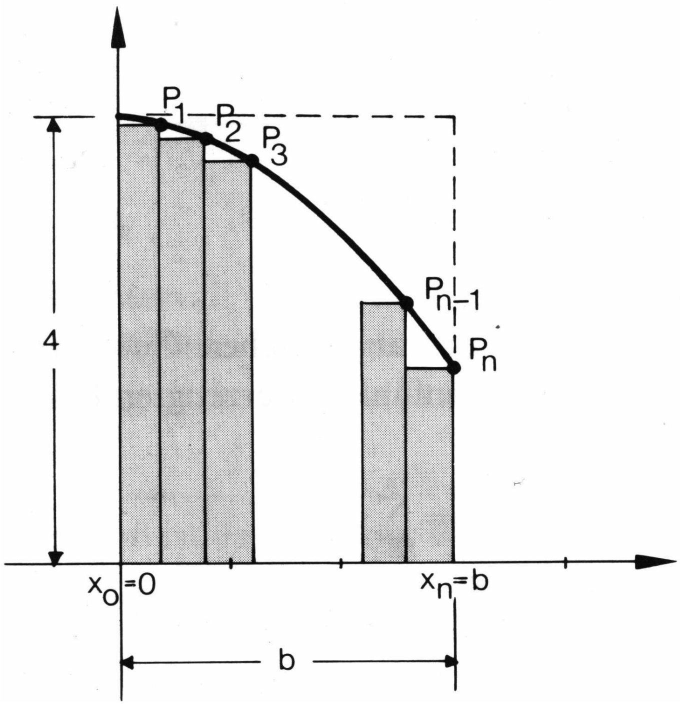
2 Flächenberechnung

2.1 Exhaustionsmethode

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$$

und wollen die Fläche, die $f(x)$ zwischen 0 und einem beliebigen Wert b mit der x-Achse einschließt, berechnen. Wir unterteilen das Intervall [0,b] in n gleich breite Streifen, deren einzelne Flächen wir berechnen können. [1]



Die Breite der Streifen beträgt jeweils $\frac{b}{n}$ und die Höhe entspricht dem Funktionswert y_i des betreffenden Punktes P_i.

[1]Diese Methode geht auf Archimedes zurück.

Die Koordinaten der Punkte P_i lauten:

$$\begin{aligned}
P_1(x_1/y_1) &= \left(\frac{b}{n} \;/\; -\frac{1}{4}\frac{b^2}{n^2}+4\right)\\
P_2(x_2/y_2) &= \left(\frac{2b}{n} \;/\; -\frac{1}{4}\frac{2^2b^2}{n^2}+4\right)\\
P_3(x_3/y_3) &= \left(\frac{3b}{n} \;/\; -\frac{1}{4}\frac{3^2b^2}{n^2}+4\right)\\
&\vdots\\
P_n(x_n/y_n) &= \left(\frac{nb}{n} \;/\; -\frac{1}{4}\frac{n^2b^2}{n^2}+4\right)
\end{aligned}$$

Die Fläche dieser entstehenden Treppe ist:

$$\begin{aligned}
F_{\text{Treppe}} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n}\cdot y_i\\
&= \frac{b}{n}(y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n)
\end{aligned}$$

Setzen wir statt y_i den Wert von $f(x)$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
F_{\text{Treppe}} &= \frac{b}{n}\left(-\frac{1}{4}\frac{b^2}{n^2}+4- -\frac{1}{4}\frac{2^2b^2}{n^2}+4-\frac{1}{4}\frac{3^2b^2}{n^2}+4-\cdots-\frac{1}{4}\frac{n^2b^2}{n^2}+4\right)\\
&= \frac{b}{n}\left[-\frac{1}{4}\frac{b^2}{n^2}(\underbrace{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}})+n\cdot 4\right]\\
&= \frac{b}{n}\left[-\frac{1}{4}\frac{b^2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4n\right]\\
&= -\frac{1}{4}\frac{b^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{4nb}{n}\\
&= -\frac{b^3}{24}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)+4b\\
&= -\frac{b^3}{24}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+4b
\end{aligned}$$

Wir können unser Ergebnis auch als Funktion betrachten, die jeweils abhängig von der Anzahl n der betrachteten Streifen die Treppenfläche liefert:

$$F_n = -\frac{b^3}{24}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+4b$$

Für $n=3$ und $b=3$ erhalten wir beispielsweise:

$$F_3 = -\frac{27}{24}\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)+12 = \frac{17}{2}$$

unendlich viele Streifen...
Erhöhen wir die Anzahl der Streifen immer mehr, nähert sich der Flächeninhalt der Treppe unserem eigentlichen Ziel, nämlich der Fläche zwischen dem Graph von $f(x)$ und der x-Achse, immer mehr an. Ideal wäre, wenn wir *unendlich* viele Streifen betrachten könnten. Wir bilden daher folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{b^3}{24}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+4b\right]$$

Wenn jedoch $n\to\infty$, bedeutet das, dass $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ zu 1 wird und $\left(2+\frac{1}{n}\right)$ zu 2. (Denn: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$).

D.h. das Produkt hat für $n\to\infty$ den Wert 2 und der Grenzwert lautet:

$$\lim_{n\to\infty} F_n = -\frac{b^3}{12}+4b$$

2.2 Das Integral als Flächeninhalt

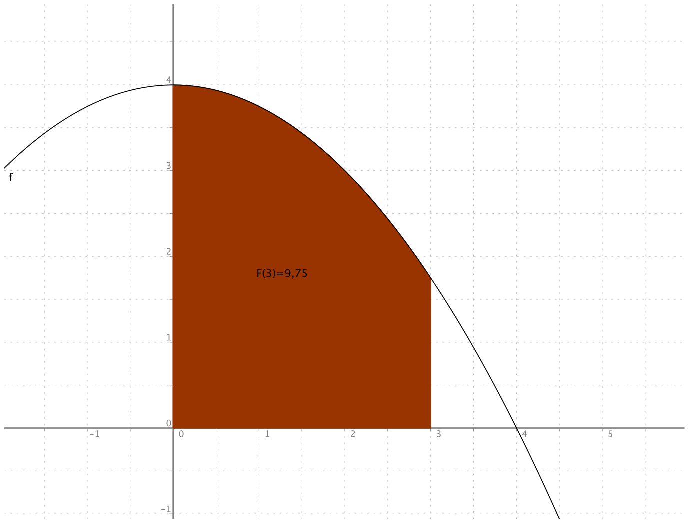
Wir haben (eher umständlich) den Flächeninhalt zwischen dem Graph von $f(x)$ und der x-Achse mittels unendlichen vielen Streifen berechnet. Betrachtet man $f(x)$ und deren Stammfunktion $F(x)$, so fällt auf, dass unser Ergebnis von vorher exakt der Stammfunktion entspricht:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{4}x^2+4 \\ F(x) &= -\frac{1}{4}\frac{x^3}{3}+4x \\ &= -\frac{x^3}{12}+4x \end{aligned}$$

Die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ entspricht der Fläche zwischen dem Graph von $f(x)$ und der x-Achse im Intervall [0,x].

z.B.:

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{x^3}{12}+4x \\ F(3) &= -\frac{27}{12}+12 = \\ &= 9,75 \end{aligned}$$



Definition (nach Riemann): Man nennt die Fläche zwischen dem Graphen einer stetigen Funktion $f(x)$ und der x-Achse im Intervall [a,b] *bestimmtes Integral* von f zwischen den Grenzen a und b und bezeichnet dies mit

$$\int_a^b f(x)dx$$

2.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechung

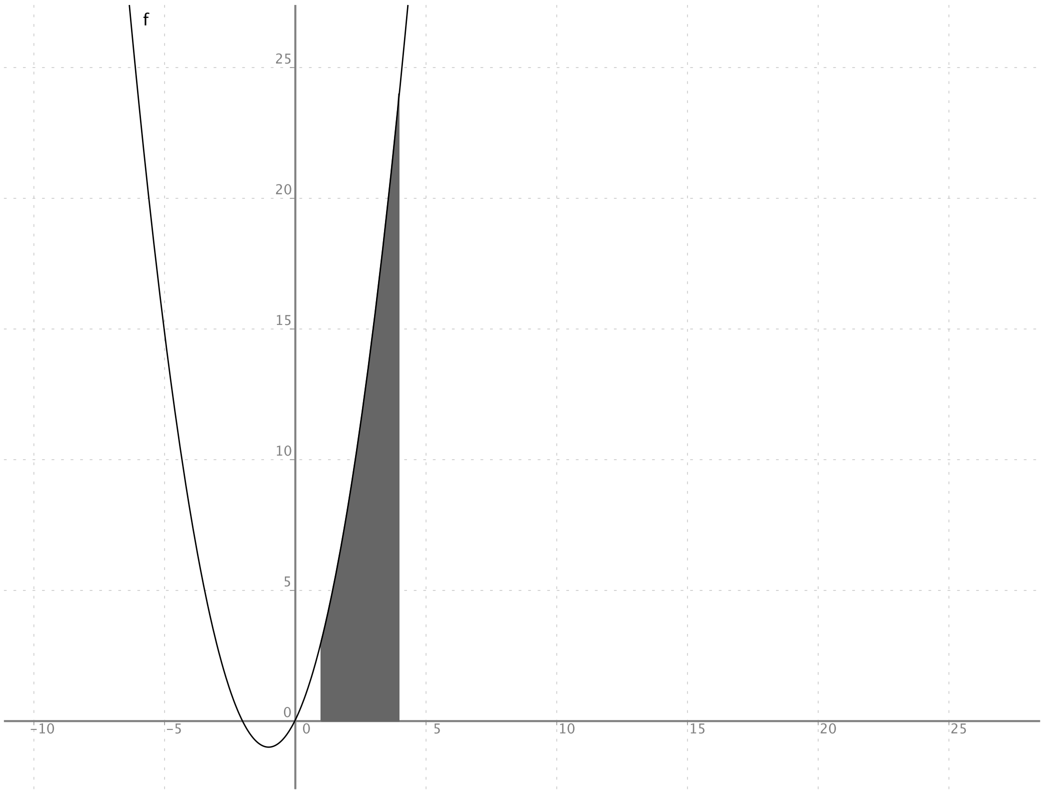
Da wir nun wissen, dass wir den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse im Intervall [0,b] mittels der Stammfunktion $F(b)$ berechnen können, ist es naheliegend, die Fläche *jedes beliebigen* Intervalls folgendermaßen zu bestimmen:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechung: Es sei $f(x)$ eine reelle Funktion und in [a,b] stetig, $F(x)$ eine Stammfunktion von f, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Beispiel:
Berechne das Integral $\int_1^4 (x^2+2x)dx$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^3}{3} + x^2 \\ \int_1^4 (x^2+2x)dx &= F(4) - F(1) \\ &= \left(\frac{4^3}{3} + 4^2\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1^2\right) \\ &= \frac{64}{3} + 16 - \frac{1}{3} - 1 \\ &= 36 \end{aligned}$$



2.4 Rechenregeln für Integrale

- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \qquad k \in \mathbb{R}$

2.5 Das unbestimmte Integral

Kennt man keine speziellen Grenzen des Integrals, ist es üblich, die Stammfunktion auch als **unbestimmtes Integral** zu bezeichnen:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

z.B.:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Anmerkung: Da die Stammfunktion nicht eindeutig ist, müsste man eigentlich schreiben:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

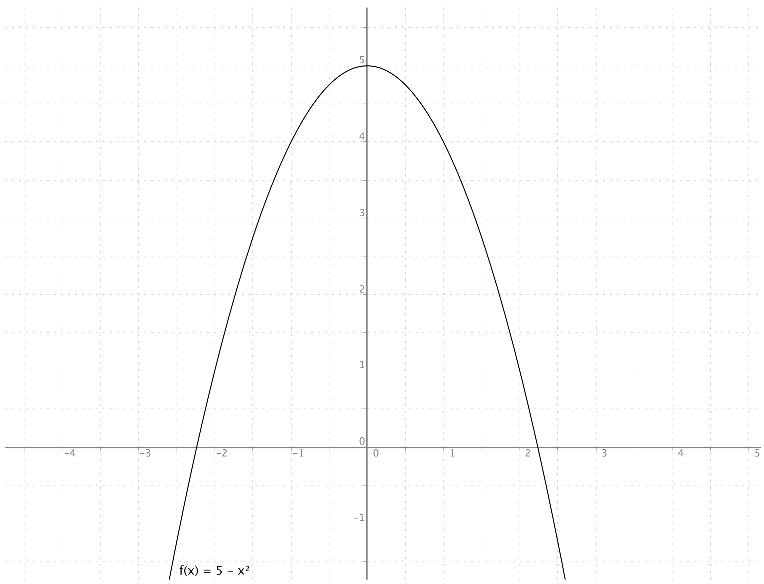
3 Anwendungen des Integrals

3.1 Fläche zwischen Graph und x-Achse

Beispiel 1:
Berechne die Fläche, die vom Graphen der Funktion

$$f(x) = 5 - x^2$$

und der x-Achse eingeschlossen wird!



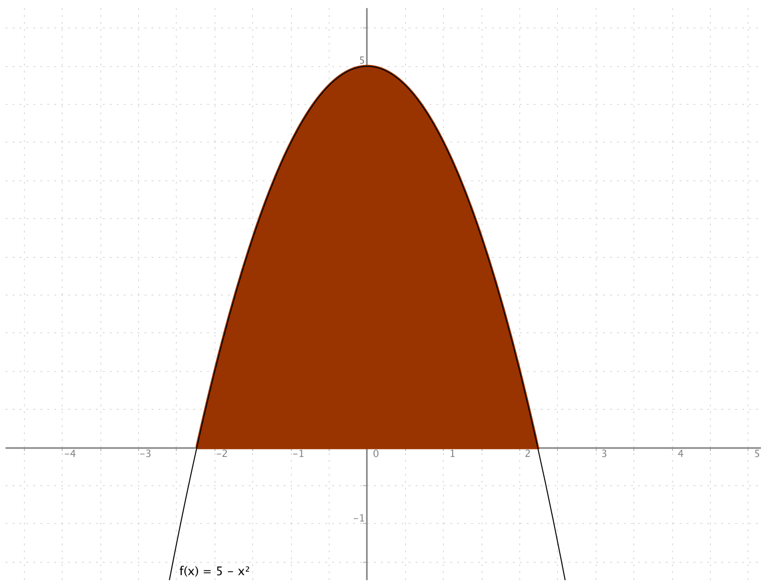
Wir bestimmen zuerst die Nullstellen von $f(x)$:

$$\begin{aligned} 0 &= 5 - x^2 \\ x^2 &= 5 \\ x_1 &= \sqrt{5} \\ x_2 &= -\sqrt{5} \end{aligned}$$

Wir erhalten die gesuchte Fläche also, indem wir folgendes Integral bilden:

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (5 - x^2) dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (5 - x^2) dx &= \left(5x - \frac{x^3}{3}\right) \Bigg|_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \\ &= \left(5\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5^3}}{3}\right) - \left(-5\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5^3}}{3}\right) \\ &= 14,91 \end{aligned}$$



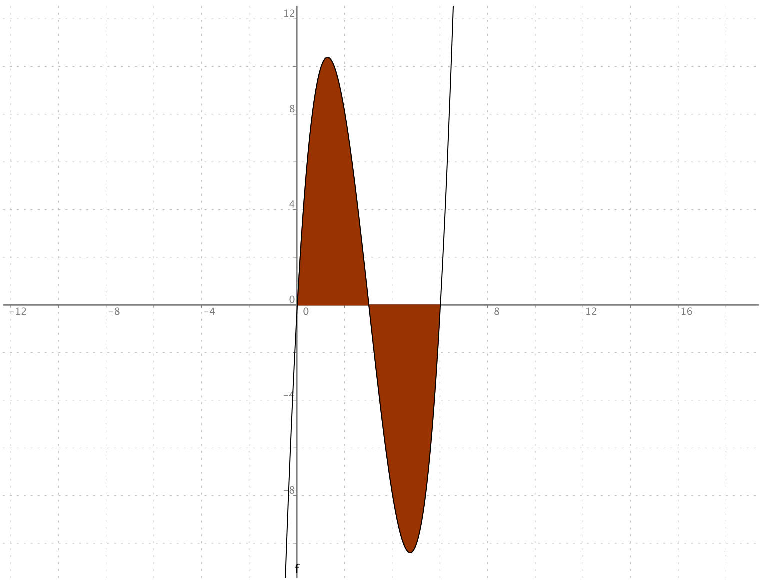
Beispiel 2:
Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 18x$$

und der x-Achse im Intervall [0,6] einschlossen wird.

$$\begin{aligned}\int_0^6 (x^3 - 9x^2 + 18x)dx &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} + \frac{18x^2}{2}\right)\Big|_0^6 \\ &= \frac{6^4}{4} - \frac{9\cdot 6^3}{3} + \frac{18\cdot 6^2}{2} - 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Wie kann eine Fläche 0 sein? Betrachten wir den Graphen von $f(x)$:



Offensichtlich liegt das Problem darin, dass einer der beiden Flächeninhalte *unter* der x-Achse liegt. Wir berechnen daher die beiden Flächenstücke getrennt:

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x^3 - 9x^2 + 18x)dx &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} + \frac{18x^2}{2}\right)\Big|_0^3 \\ &= \frac{3^4}{4} - \frac{9\cdot 3^3}{3} + \frac{18\cdot 3^2}{2} - 0 \\ &= \frac{81}{4} = 20,25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_3^6 (x^3 - 9x^2 + 18x)dx &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} + \frac{18x^2}{2}\right)\Big|_3^6 \\ &= \left(\frac{6^4}{4} - \frac{9\cdot 6^3}{3} + \frac{18\cdot 6^2}{2}\right) - \left(\frac{3^4}{4} - \frac{9\cdot 3^3}{3} + \frac{18\cdot 3^2}{2}\right) \\ &= -\frac{81}{4} = -20,25\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass eine Fläche unter der x-Achse einen negativen Wert hat! Wir nehmen daher den Betrag dieses Werts:

$$20,25 + |-20,25| = 40,5$$

Folgerungen:

- Man darf immer nur von Nullstelle zu Nullstelle integrieren!
- Flächen unter der x-Achse haben einen negativen Wert, von dem wir den Betrag nehmen!

3.2 Fläche zwischen zwei Kurven

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = 3x - \frac{x^2}{2}$$

und die Gerade durch die Punkte P(2/f(2)) und Q(6/f(6)) und wollen die Fläche berechnen, die von den Graphen der beiden Funktionen begrenzt wird.

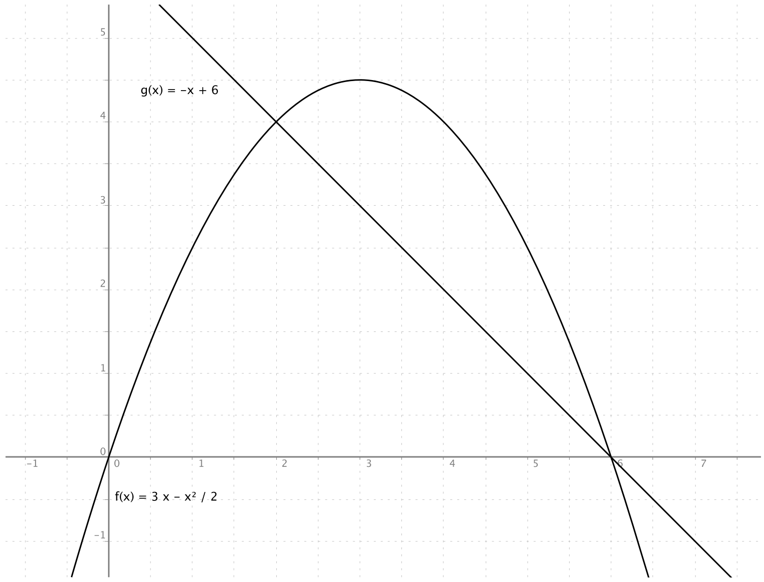
Dazu brauchen wir erst einmal die Funktionsgleichung der Geraden ($f(2) = 4, f(6) = 0$):

$$\left.\begin{aligned} 4 &= 2k + d \\ 0 &= 6k + d \end{aligned}\right\} -$$
$$\begin{aligned} 4 &= -k \\ -1 &= k \\ \Rightarrow 6 &= d \end{aligned}$$

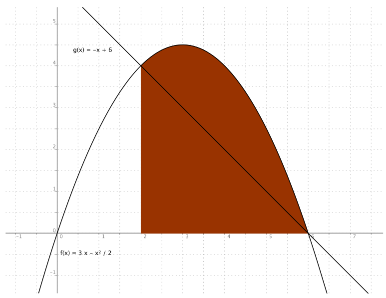
Die Gleichung der Geraden lautet also:

$$g(x) = -x + 6$$

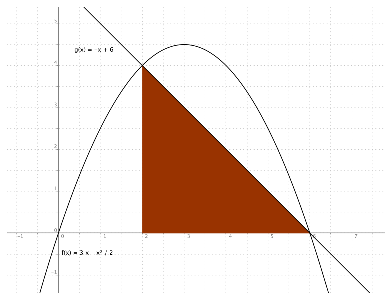
Gesucht ist die Fläche, die die beiden Graphen miteinander einschließen:



Wir können mit Hilfe des Integrals jeweils folgende Flächen berechnen:



(a) $\int_2^6 f(x)\ dx$



(b) $\int_2^6 g(x)\ dx$

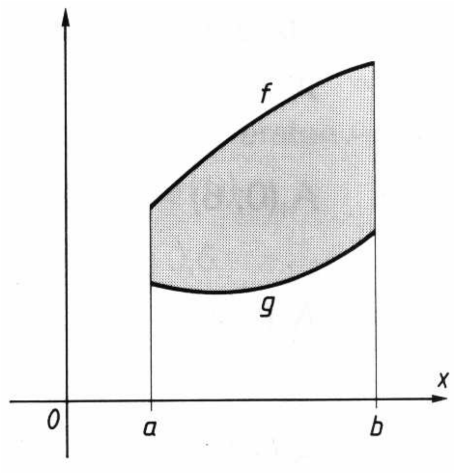
Wenn wir die rechte Fläche von der linken abziehen, bleibt genau unsere gesuchte Fläche *zwischen* den beiden Kurven übrig. Also:

$$\begin{aligned}\int_2^6 f(x)\ dx - \int_2^6 g(x)\ dx &= \int_2^6 \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\ dx - \int_2^6 (-x+6)\ dx \\ &= \frac{40}{3} - 8 \\ &= \frac{16}{3}\end{aligned}$$

Bei dieser Vorgangsweise ist bemerkenswert, dass **es egal ist, ob ganze Flächen oder auch nur Teilflächen unter der x-Achse liegen**! Es gilt allgemein:

Die Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall [a,b] wird berechnet durch

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx\right| = \left|\int_a^b (f(x) - g(x))\ dx\right|$$



MERKE:
Immer nur von Schnittpunkt zu Schnittpunkt integrieren! (Da sich die Lage der Graphen zu einander ändern könnte, und damit das Vorzeichen des Ergebnisses, kann es sein, dass sich Teilflächen rechnerisch von einander subtrahieren.)

3.3 Volumsberechnungen

Mit dem Integral ist es nicht nur möglich, Flächen sondern auch Volumina (von Drehkörpern) zu berechnen:

Das Volumen V eines Körpers, der durch die Rotation des Graphen einer Funktion f um die x-Achse im Intervall [a,b] entsteht, ist gegeben durch:

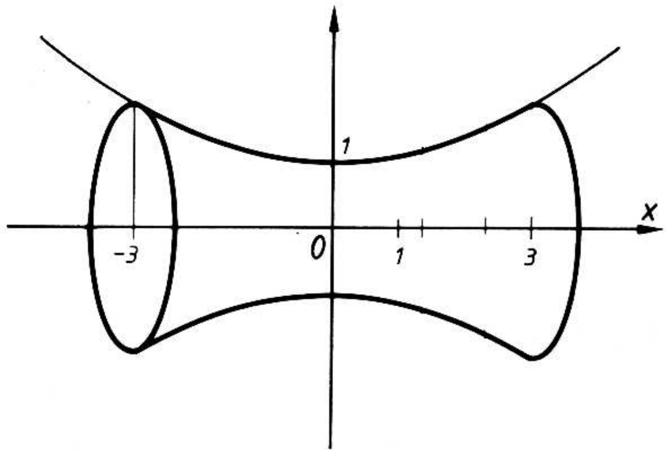
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\ dx = \pi \int_a^b y^2\ dx$$

Anm.: $f^2(x) = (f(x))^2$

Beispiel:
Eine Vase hat die Form, die durch Rotation des Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{10} + 1$$

um die x-Achse im Intervall [-3,3] entsteht. Berechne das Volumen der Vase!



Wir wenden nun die vorige Formel an:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-3}^{3} \left(\frac{x^2}{10}+1\right)^2 \, dx \\
&= \pi \int_{-3}^{3} \left(\frac{x^4}{100}+\frac{x^2}{5}+1\right) \, dx \\
&= \pi \left(\frac{x^5}{500}+\frac{x^3}{15}+x\right)\Bigg|_{-3}^{3} \\
&= \pi \left[\left(\frac{3^5}{500}+\frac{3^3}{15}+3\right) - \left(\frac{(-3)^5}{500}+\frac{(-3)^3}{15}+(-3)\right)\right] \\
&= \frac{5286}{500}\pi \\
&= 10,572\pi \\
&\approx 33,21
\end{aligned}$$

Rotation um die y-Achse

Es ist auch möglich, die Rotation um die y-Achse und das damit entstehende Volumen zu berechnen. Man benötigt dazu die *Umkehrfunktion*. (D.h. man formt die Funktionsgleichung auf die Form $x = ...$ um.) Das Volumen berechnet man dann folgendermaßen:

Das Volumen V eines Körpers, der durch die Rotation des Graphen einer Funktion f um die y-Achse im Intervall [c,d] entsteht, ist gegeben durch:

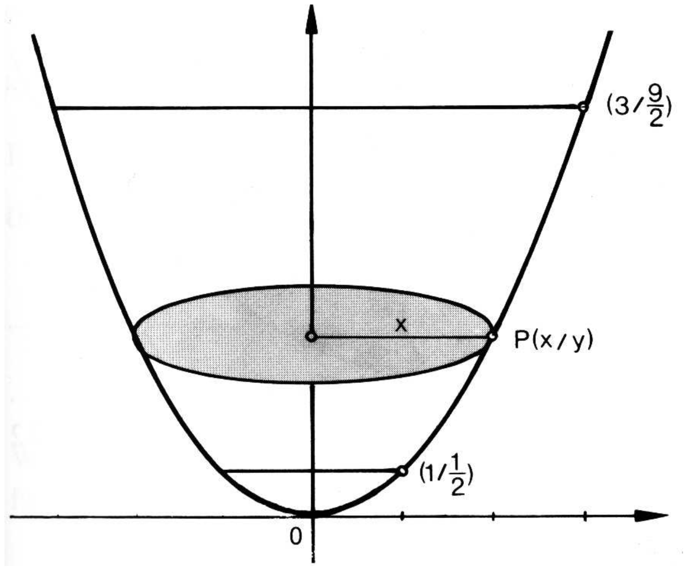
$$V = \pi \int_{c}^{d} f^{*2}(y) \, dy = \pi \int_{c}^{d} x^2 \, dy$$

Anm.: $f^{*}(y)$ ist die *Umkehrfunktion* von f

Beispiel:
Eine Vase hat die Form, die entsteht, wenn

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

im Intervall $[f(1), f(3)] = [\frac{1}{2}, \frac{9}{2}]$ um die y-Achse rotiert. Wie groß ist das Volumen dieser Vase?



Wir bilden zunächst die Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{x^2}{2}$, indem wir $f(x)$ auf die Form $x = ...$ umformen. Da wir jedoch ohnehin $x^2 = ...$ benötigen, genügt uns Folgendes:

$$y = \frac{x^2}{2}$$
$$2y = x^2$$

Jetzt können wir das gesuchte Volumen berechnen:

$$V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{2}} 2y \; dy$$
$$= \pi(y^2)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{2}}$$
$$= 20\pi$$
$$\approx 62,83$$