Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Mag. Martin Bruckbauer

17. Oktober 2005

1 Grundlagen

Beispiel
Bei einer dreitägigen Radtour werden insgesamt 260 km zurückgelegt. Die erste Tagesetappe ist doppelt so lang, wie die dritte. Die zweite ist um 40 km kürzer als die erste. Wie lang sind die drei Tagesetappen?

Wie können die Aufgabe mit einer Gleichung lösen. Obwohl in der Aufgabe von *drei* Etappen die Rede ist, können wir diese - weil wir etwas über ihre Beziehungen zueinander wissen - durch nur *eine* ausdrücken.

$$\begin{array}{ll}
|\underbrace{-------------}_{x}| & \text{1. Tagesetappe } x \\
|\underbrace{---------}_{x-40}| & \text{2. Tagesetappe } x-40 \\
|\underbrace{-------}_{\frac{x}{2}}| & \text{3. Tagesetappe } \frac{x}{2}
\end{array}$$

Alle drei Tagesetappen zusammen müssen 260 km ergeben. Also:

$$\underbrace{|\underbrace{-------------}_{x}|\underbrace{---------}_{x-40}|\underbrace{-------}_{\frac{x}{2}}|}_{260}$$

Oder als Gleichung formuliert:

$$x + (x - 40) + \frac{x}{2} = 260$$

Nun lösen wir die Gleichung durch sog. *Äquivalenzumformungen*:

$$
\begin{aligned}
x + (x-40) + \frac{x}{2} &= 260 \\
\frac{5x}{2} - 40 &= 260 \quad | + 40 \\
\frac{5x}{2} &= 300 \quad | \cdot 2 \\
5x &= 600 \quad | : 5 \\
x &= 120
\end{aligned}
$$

Die Variable x steht für die 1. Tagesetappe, daher ist die **1. Etappe 120 km**, die **2. Etappe 80 km** und die **3. Etappe 60 km** lang.

Bei einer **Äquivalenzumformung** darf man:

- beide Seiten vertauschen
- zu beiden Seiten denselben Term addieren oder subtrahieren
- beide Seiten mit demselben Term ($\neq 0$) multiplizieren oder durch denselben Term ($\neq 0$) dividieren

Äquivalenzumformungen verändern nicht die Lösungsmenge einer Gleichung!

Wo liegt der Fehler?

Beweis, dass $1 = 2$ ist:

$$
\begin{aligned}
a^2 - a^2 &= a^2 - a^2 \\
a(a-a) &= (a+a)(a-a) \quad | : (a-a) \\
a &= a + a \\
a &= 2a \quad | : a \\
1 &= 2
\end{aligned}
$$

(Der Fehler liegt darin, dass in der 2. Zeile eigentlich durch 0 dividiert wird, und das ist ja nicht erlaubt!)

Anmerkungen:

- Wenn nicht anders angegeben, ist die Grundmenge immer $\mathbb{R}$.
- Die unbekannte Variable muss nicht immer x heißen. Die Benennung ist völlig frei.

Beispiele zu Äquivalenzumformungen:

1. $\dfrac{1}{x-2} - 3 = 0 \qquad G = \mathbb{Z}$

2. $\dfrac{3x}{x-1} = 3 - \dfrac{1}{x} \qquad G = \mathbb{R}$

Lösungen:

1. Da diese Gleichung Bruchterme enthält, müssen wir eine Definitionsmenge $\mathbb{D}$ bilden. Wir suchen dafür alle Zahlen, die eine Division durch 0 bewirken könnten und schließen diese aus unserer Grundmenge aus:
   $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$
   daher lautet unsere Definitionsmenge (= die neue Grundmenge):
   $\mathbb{D} = \mathbb{Z} \setminus \{2\}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-2} - 3 &= 0 \qquad |+3 \\
\frac{1}{x-2} &= 3 \qquad |\cdot(x-2) \\
1 &= 3(x-2) \\
1 &= 3x - 6 \qquad |+6 \\
7 &= 3x \qquad |:3 \\
\frac{7}{3} &= x
\end{aligned}$$

   $\dfrac{7}{3} \notin \mathbb{D} \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$

2. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{x-1} &= 3 - \frac{1}{x} \\
\frac{3x}{x-1} &= \frac{3x-1}{x} \qquad |\cdot x \cdot (x-1) \\
3x^2 &= (3x-1)(x-1) \\
3x^2 &= 3x^2 - 4x + 1 \qquad |-3x^2 \\
0 &= -4x + 1 \qquad |+4x \\
4x &= 1 \qquad |:4 \\
x &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

   $\mathbb{L} = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$

1.1 Einteilung von Gleichungen

Je nachdem, welche Merkmale man betrachtet, gibt es mehrere Möglichkeiten der *Einteilung von Gleichungen*:

1.1.1 nach Anzahl der Variablen

- Gleichung mit *einer* Unbekannten (z.B. $2x^2 - x = 1$)
- Gleichung mit *zwei* Unbekannten (z.B. $x + y = 2$)
- Gleichung mit *drei* Unbekannten (z.B. $2a + 3b - c = 0$)

1.1.2 nach Art der Terme

- Algebraische Gleichungen:[1]
  - lineare Gleichung (Gleichung 1. Grades) (z.B. $2x + 3 = 0$)
  - quadratische Gleichung (Gleichung 2. Grades) (z.B. $x^2 + 2x = 3$)
  - Wurzelgleichung (z.B. $\sqrt{x+3}$)
- Nichtalgebraische (transzendente) Gleichungen:
  - z.B. $\sin x = 0,25$; $2^x = 8$; $\cos x = 3 + x$

1.1.3 nach Anzahl der Lösungen

- Allgemein gültige Gleichung (Tautologie): $\mathbb{L} = \mathbb{D}$ (z.B. $x + x = 2x$)
- Unlösbare Gleichung: $\mathbb{L} = \{\}$ (z.B. $x + 1 = x$; $x^2 + 1 = 0$; $2x = 3$, wenn $G = \mathbb{N}$)
- Lösbare Gleichung: (z.B. $2x = 4 \quad \mathbb{L} = \{2\}$; $x^2 = 1 \quad \mathbb{L} = \{-1, 1\}$)

Definition: Eine Gleichung der Form $a \cdot x + b = 0$ wobei a und b beliebige Zahlen sind, heißt *lineare Gleichung*.

Jeder lineare Gleichung mit $a \neq 0$ hat für $G = \mathbb{R}$ maximal *eine* Lösung!

[1] Algebraische Gleichungen lassen sich auf die Form $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = 0$ bringen (Polynom).

z.B.:

$$
\begin{aligned}
2x+1 &= 0 \qquad \mid -1 \\
2x &= -1 \qquad \mid :2 \\
x &= -\frac{1}{2} \\
\mathbb{L} &= \left\{-\frac{1}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

1.2 Sonderfälle der Lösung einer linearen Gleichung

Manchmal haben lineare Gleichungen (1) $\mathbb{L} = \{\}$ oder (2) $\mathbb{L} = \mathbb{D}$:
zu (1):

$$
\begin{aligned}
3x+2 &= 3(x+1)-1 \\
3x+2 &= 3x+3-1 \\
3x+2 &= 3x+2 \qquad \mid -3x-2 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung ist für alle Zahlen aus $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ gültig, also $\mathbb{L} = \mathbb{D}$.

zu (2):

$$
\begin{aligned}
3x+2 &= 3(x+1) \\
3x+2 &= 3x+3 \qquad \mid -3x \\
2 &= 3
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung ist für alle Zahlen aus $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ ungültig, also $\mathbb{L} = \{\}$.

1.3 Umformen von Formeln

Das Umformen von Formeln ist nichts anderes als das Lösen einer Gleichung nach der gesuchten Größe.

z.B.:
Man soll die Formel $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ des Flächeninhalts des Trapezes auf die Form $a = ...$ bringen:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{a+c}{2} \cdot h \qquad \mid \cdot 2 \\
2A &= (a+c) \cdot h \\
2A &= ah + ch \qquad \mid -ch \\
2A - ch &= ah \qquad \mid :h \\
\frac{2A-ch}{h} &= a
\end{aligned}
$$

2 Textaufgaben

Bei Textaufgaben besteht die Herausforderung darin, den Text so in eine Gleichung zu übersetzen, dass man diese lösen kann. Wir beginnen mit einfachen Beispielen zum Eingewöhnen.

2.1 zum Eingewöhnen ...

Beispiel 1
Eine Autowerkstätte soll bei 12 Autos die Reifen wechseln. Im Lager liegen genau 2 Reifen zu viel. Wie viele Reifen hat die Autowerkstätte im Lager? (x = Anzahl der Reifen)

$$\begin{aligned} 12 \cdot 4 + 2 &= x \\ 50 &= x \end{aligned}$$

Es befinden sich 50 Reifen im Lager.

Beispiel 2
In einer Klasse von 36 Schülern sind doppelt so viele Mädchen wie Buben. Wie viele Mädchen und Buben gibt es in der Klasse? (x = Anzahl der Buben)

$$\begin{aligned} 2x + x &= 36 \\ 3x &= 36 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Es gibt also 12 Buben und 24 Mädchen in der Klasse.

Beispiel 3
Wenn man die Seite eines Quadrats um 5 cm verlängert, und die andere um 5 cm verkürzt, so erhält man ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 600 cm^2. Wie lang war die Seite des ursprünglichen Quadrats?

$$\begin{aligned} (x+5)(x-5) &= 600 \\ x^2 - 25 &= 600 \\ x^2 &= 625 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

Das ursprüngliche Quadrat hatte eine Seitenlänge von 25 cm.

2.2 Teilungsaufgaben

Beispiel
Ein Gewinn von € 1220,- soll unter 3 Personen A, B und C aufgeteilt werden. B erhält das Doppelte von A, C die Hälfte von A. Weiters wurde ein Betrag

von € 100,- für einen wohltätigen Zweck gespendet. Wie viel erhalten die 3 Personen?

Lösung

Person	Teilbetrag in €
A	x
B	$2x$
C	$\frac{x}{2}$
Spende	100
Summe	1220

Da die Summe der Teilbeträge den Gesamtbetrag ergibt, lautet die Gleichung:

$$\begin{aligned} x + 2x + \frac{x}{2} + 100 &= 1220 \\ \frac{7x}{2} + 100 &= 1220 \\ \frac{7x}{2} &= 1120 \\ 7x &= 2240 \\ x &= 320 \end{aligned}$$

Daher sieht die Aufteilung folgendermaßen aus:

Person	Teilbetrag in €	
A	x	320
B	$2x$	640
C	$\frac{x}{2}$	160
Spende	100	100
Summe	1220	

Probe: $320 + 640 + 160 + 100 = 1220$

2.3 Mischungsaufgaben

Beispiel 1

Einige Schüler möchten Walnüsse, Erdnüsse und Rosinen zu insgesamt 5 kg „Studentenfutter“ mischen. Dabei soll in der Mischung das Gewicht der Walnüsse halb so groß sein, wie jenes der Erdnüsse. Die Erdnüsse kosten € 3,- pro kg, die Rosinen € 2,- pro kg und die Walnüsse € 4,- pro kg. Welche Mengen Walnüsse, Erdnüsse und Rosinen werden benötigt, wenn 1 kg Studentenfutter € 3,- kosten soll?

Lösung:

Bestandteil	Masse in kg	Preis in €
Walnüsse	x	$4x$
Erdnüsse	$2x$	$6x$
Rosinen	$5-3x$	$2\cdot(5-3x)$
Summe	5	15

Die Summe der Preise der Bestandteile muss den Preis der Mischung ergeben, daher:

$$\begin{aligned} 4x+6x+2\cdot(5-3x) &= 15 \\ 4x+6x+10-6x &= 15 \\ 4x+10 &= 15 \\ 4x &= 5 \\ x &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Man benötigt 1,25 kg Walnüsse, 2,5 kg Erdnüsse und 1,25 kg Rosinen.

Beispiel 2
Gold in reiner Form ist zu weich um bearbeitet zu werden. Deshalb wird es mit Kupfer gemischt („legiert"). Bei Goldlegierungen wird der Anteil reinen Goldes in Karat angegeben. 1 Karat Gold bedeutet, dass $\frac{1}{24}$ der Legierung reines Gold ist.
Wie viel g 20-karätiges Gold muss man mit 36 g Kupfer legieren, um Gold von 14 Karat zu erhalten?

Lösung:

	Material	Masse in g	reines Gold in g
vor der Mischung	20 karätiges Gold	x	$\frac{20}{24}x$
	Kupfer	36	0
nach der Mischung	14 karätiges Gold	$36+x$	$\frac{14}{24}\cdot(36+x)$

Die Masse des reinen Goldes ist vor und nach der Mischung gleich:

$$\begin{aligned} \frac{20}{24}x+0 &= \frac{14}{24}\cdot(36+x) \\ 20x &= 14(36+x) \\ 20x &= 504+14x \\ 6x &= 504 \\ x &= 84 \end{aligned}$$

Probe: Gold vor und nach der Mischung:

$$\begin{aligned}\frac{20}{24}\cdot 84 &= \frac{14}{24}\cdot(36+84)\\ 70 &= 70\end{aligned}$$

Man braucht also 84 g 20-karätigen Goldes.

2.4 Leistungsaufgaben

Beispiel 1
Ein Schwimmbecken kann durch zwei Rohre A und B gefüllt werden. Allein würde Rohr A das Becken in 42 min, Rohr B in 56 min füllen.

1. Wie lange brauchen beide Rohre gemeinsam um das Becken zu füllen?
2. Zunächst ist 14 min nur das schwächere Rohr in Betrieb. Danach wird auch das zweite Rohr zugeschaltet. Wie lange dauert die Füllung?

Lösung zu 1.:
V ist die gesamte Füllmenge. Der Wert ist allerdings unerheblich.

Rohr	Zuflussmenge pro Minute	Betriebszeit (min)	Zuflussmenge in der Betriebszeit
A	$\frac{V}{42}$	x	$\frac{V}{42}x$
B	$\frac{V}{56}$	x	$\frac{V}{56}x$

Die gesamte Füllmenge V muss gleich der Zuflussmenge von Rohr A und Rohr B sein:

$$\begin{aligned}V &= \frac{V}{42}x + \frac{V}{56}x\\ 1 &= \frac{x}{42} + \frac{x}{56}\\ &\cdots\\ x &= 24\end{aligned}$$

Es dauert also 24 Minuten bis das Becken gefüllt ist.

Beispiel 2
Gleiches Beispiel wie 1. - allerdings mit der Änderung, dass das „stärkere“ Rohr erst nach 14 Minuten geöffnet wird.

Lösung zu 2.:

Rohr	Zuflussmenge pro Minute	Betriebszeit (min)	Zuflussmenge in der Betriebszeit
A	$\frac{V}{42}$	$x-14$	$\frac{V}{42}(x-14)$
B	$\frac{V}{56}$	x	$\frac{V}{56}x$

Die gesamte Füllmenge V muss wieder gleich der Zuflussmenge von Rohr A und Rohr B sein:

$$\begin{aligned} V &= \frac{V}{42}(x-14) + \frac{V}{56}x \\ 1 &= \frac{x-14}{42} + \frac{x}{56} \\ &\dots \\ x &= 32 \end{aligned}$$

D.h. Rohr B ist 32 min geöffnet und Rohr A 18 min.

2.5 Prozentaufgaben

Beispiel

Der Preis einer Ware wird um 20% gesenkt. Bald darauf wurde er allerdings wieder um 5% des aktuellen Preises erhöht. Damit kostet die Ware € 126,- Wie viel kostete die Ware urspünglich? Um wie viel Prozent wurde der Preis der Ware wirklich gesenkt?

Lösung:

ursprünglicher Preis	x
Preissenkung um 20%	$x \cdot 0,8$
Preissteigerung um 5%	$0,8x \cdot 1,05$
Endpreis:	$0,84x$

Daher:

$$\begin{aligned} 0,84x &= 126 \\ x &= 150 \end{aligned}$$

Der ursprüngliche Preis betrug also € 150,-. Die Preissenkung betrug € 24,-. Die Preissenkung in Prozent betrug daher $\frac{24}{150} \cdot 100 = 16\%$.

2.6 Bewegungsaufgaben

Grundsätzlich gibt es zwei Arten von möglichen Bewegungen.

- Fall 1: die Fahrzeuge fahren zeitversetzt in die gleiche Richtung und eines holt das andere ein.
- Fall 2: die Fahrzeuge fahren einander entgegen und treffen sich.

Beispiel 1:
Um 7:00 verlässt ein LKW mit einer Durchschnittgeschwindigkeit von 80 km/h eine Firma. Leider hat er etwas vergessen, sodass man einen PKW nachschicken muss. Der PKW fährt um 8:00 ab mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 km/h. Wann holt der PKW den LKW ein? Wie weit ist er bis dahin gefahren?

Lösung:
Die grundlegende Beziehung zwischen Weg, Zeit und Geschwindigkeit lautet:

$$s = v \cdot t$$

also:

$$\text{Weg} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit}$$

Wir können folgende Übersicht aufstellen:

Fahrzeug	Fahrzeit	Geschwindigkeit	Weg
LKW	x	80	$80x$
PKW	$x-1$	120	$120 \cdot (x-1)$

Da der PKW dem LKW nachfährt, ist zum Zeitpunkt des Einholens der Weg, den die beiden zurückgelegt haben, gleich:

$$80x = 120 \cdot (x-1)$$
$$\dots$$
$$x = 3$$

Der PKW holt den LKW also nach 3 Stunden ein und er hat bis dahin $3 \cdot 120 = 360$ km zurückgelegt.

Beispiel 2:
Um 7:00 verlässt ein LKW mit einer Durchschnittgeschwindigkeit von 80 km/h den Ort A in Richtung 500 km entfernten Ort B. Um 8:00 fährt ihm ein PKW mit der Durchschnittgeschwindigkeit von 120 km/h von Ort B aus entgegen.

Wann treffen sich PKW und LKW? Wie weit von Ort A entfernt treffen sich die beiden?

Lösung:
Wir verwenden die Übersicht vom vorigen Beispiel:

Fahrzeug	Fahrzeit	Geschwindigkeit	Weg
LKW	x	80	$80x$
PKW	$x-1$	120	$120 \cdot (x-1)$

Zum Zeitpunkt des Treffens hat der LKW den einen Teil und der PKW den anderen Teil der Gesamtstrecke zurückgelegt. Also:

$$\begin{aligned} 80x + 120 \cdot (x-1) &= 500 \\ &\dots \\ x &= 3,1 \end{aligned}$$

Der LKW fährt also 3 Stunden, bis sie sich treffen, d.h. sie treffen sich um 10:06 und sind dabei $80 \cdot 3,1 = 248$ km von A entfernt.

3 Lineare Ungleichungen

3.1 Einführendes Beispiel

Ein Schüler steht vor der Wahl zwischen zwei Varianten des Handy-Telefonierens (in einem bestimmten Netz):

1. Wertkarte: kein Grundentgelt, Gesprächsgebühr € 0,5/min (Gebührenmix aus Haupt- und Nebenzeit)
2. Anmeldung: € 10,- Grundentgelt, Gesprächsgebühr € 0,07/min

Unter wie viel Minuten pro Monat muss der Schüler beim Telefonieren bleiben, damit die Wertkartenvariante günstiger ist?

Lösung:
x ist die Gesprächszeit in Minuten. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0,5x &< 10 + 0,07x \\ 0,43x &< 10 \\ x &< 23,3 \end{aligned}$$

Wenn der Schüler nicht mehr als 23,3 Minuten pro Monat telefoniert, ist die Wertkartenvariante billiger.

3.2 Definition

Eine *Ungleichung* besteht aus zwei Termen, die durch eines der folgenden Zeichen $< \leq > \geq$ in Beziehung gesetzt sind.

3.3 Äquivalenzumformungen

Ungleichungen werden grundsätzlich wie Gleichungen gelöst, d.h. es gelten die gleichen Regeln der Äquivalenzumformungen. Mit einer Ergänzung:

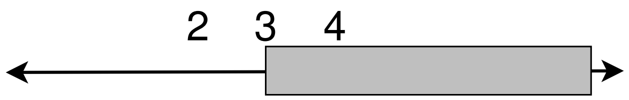
- *Multipliziert* man eine Ungleichung mit einer *negativen* Zahl oder
- *dividiert* man eine Ungleichung durch eine *negative* Zahl,

muss das **Ungleichungszeichen umgedreht** werden.

z.B.:

$$\begin{aligned} 2x + 1 &\leq 5x - 8 && \mid -1 \\ 2x &\leq 5x - 9 && \mid -5x \\ -3x &\leq -9 && \mid :(-3) \text{ Achtung!} \\ x &\geq 3 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}$



Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **1**
1.1 Einteilung von Gleichungen 4
1.1.1 nach Anzahl der Variablen 4
1.1.2 nach Art der Terme 4
1.1.3 nach Anzahl der Lösungen 4
1.2 Sonderfälle der Lösung einer linearen Gleichung 5
1.3 Umformen von Formeln 5

2 Textaufgaben **6**
2.1 zum Eingewöhnen 6
2.2 Teilungsaufgaben 6
2.3 Mischungsaufgaben 7
2.4 Leistungsaufgaben 9
2.5 Prozentaufgaben 10
2.6 Bewegungsaufgaben 11

3 Lineare Ungleichungen **12**
3.1 Einführendes Beispiel 12
3.2 Definition 13
3.3 Äquivalenzumformungen 13