

Funktionen

Mag. Martin Bruckbauer

2. Mai 2005

1 Grundbegriffe

1.1 Wertetabelle

Ein Mobilnetzbetreiber hat für ein bestimmten Netz folgenden Tarif: € 13,- monatliches Grundentgelt sowie € 0,07 Gesprächsgebühr pro Minute (also € 4,20 pro Stunde).

Wie kann man den Rechnungsbetrag abhängig von der Gesprächszeit (x in Stunden) darstellen?

Wie stellen eine *Wertetabelle* auf:

Gesprächszeit x in h	Rechnungsbetrag y in €
0	13,0
1	17,2
2	21,4
3	25,5
4	29,8
5	34,0
...	...

1.2 Gleichung (Formel)

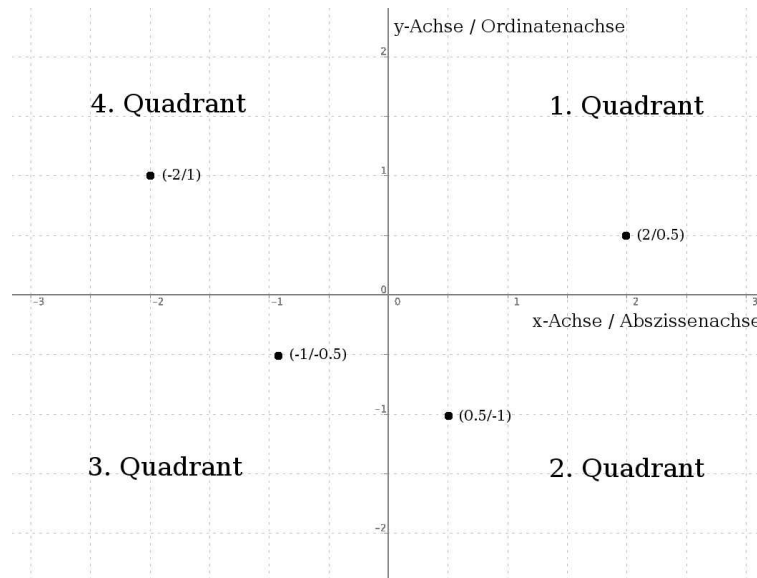
Es ist naheliegend diesen Zusammenhang als Formel oder Gleichung auszudrücken:

$$y = 13 + 4,2x$$

x	y
0	$13 + 4,2 \cdot 0 = 13,0$
1	$13 + 4,2 \cdot 1 = 17,2$
2	$13 + 4,2 \cdot 2 = 21,4$
3	$13 + 4,2 \cdot 3 = 25,5$
4	$13 + 4,2 \cdot 4 = 29,8$
5	$13 + 4,2 \cdot 5 = 34,0$
...	...

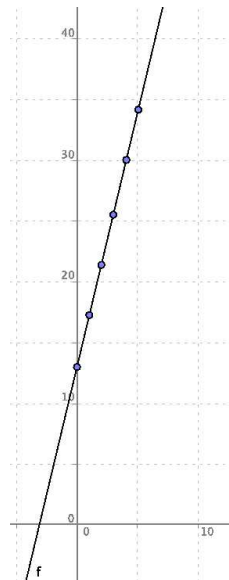
1.3 Graphische Darstellung

Wir können unsere Werte der Wertetabelle in ein sog. *rechtwinkliges Koordinatensystem*¹.



Anmerkung: Man nennt den Punkt $(0/0)$ auch *Ursprung*.

In dieses Koordinatensystem können wir nun unsere Werte eintragen. Dadurch bekommen wir den Eindruck, dass es sich um eine Linie handelt:



Alle diese Darstellungen zeigen, dass zu jeder Gesprächszeit x eindeutig ein bestimmter Rechnungsbetrag y gehört.

¹Man nennt dieses Koordinatensystem auch *kartesisches Koordinatensystem*, da es auf den franz. Mathematiker und Philosophen René DESCARTES, der sich auch KARTESIUS nannte, zurückgeht.

1.4 Definition

Man wird sich in in unserem Beispiel nicht immer für alle möglichen Gesprächszeiten interessieren (z.B. nicht für negative Zeiten, was keinen Sinn ergäbe). Den interessanten Bereich nennt man *Definitionsmenge* \mathbb{D} . Die dazu gehörigen Rechnungsbeträge nennt man *Wertemenge* \mathbb{W} . Die Zuordnung von Gesprächszeit und Rechnungsbetrag nennt man *Funktion*.

Allgemein:

Eine Funktion ist eine Zuordnung, bei der jedem Element x der Definitionsmenge genau ein Element y der Wertemenge zugeordnet wird.

Man sagt daher auch, dass y von x *abhängig* ist.

Schreibweise:

$$f(x) = y$$

konkret:

$$f(x) = 13 + 4,2x$$

andere übliche Schreibweisen sind:

$$y = 13 + 4,2x$$

$$f : x \rightarrow 13 + 4,2x$$

2 Nullstellen und Monotonie von Funktionen

- Wo schneidet der Graph der Funktion $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ die x-Achse?
- Gibt es x-Bereiche, in denen der Graph stets steigt bzw. fällt?

Wir zeichnen den Graphen der Funktion $\mathbb{D} = [-3, 5]$ und erstellen dafür eine Wertetabelle:

x	y
-3	6
-2	2,5
-1	0
0	-1,5
1	-2
2	-1,5
3	0
4	2,5
5	6

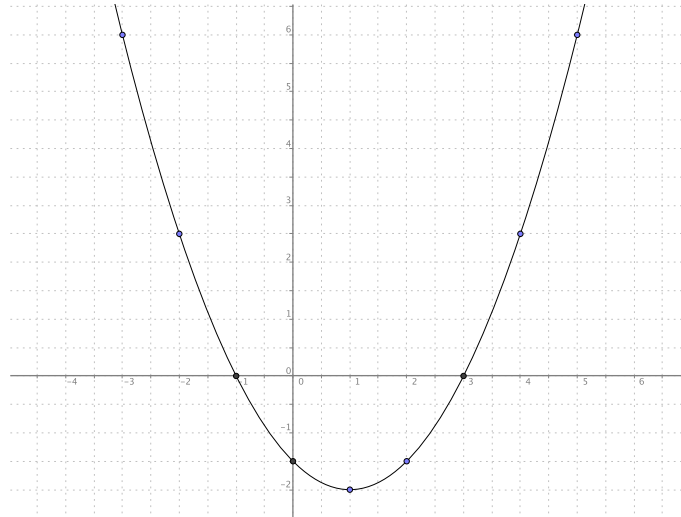


Abbildung 1: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

Die erhaltenen Punkte zeichnen wir in das Koordinatensystem und verbinden die Punkte zu einer Kurve:

Nun können wir die beiden Fragen beantworten:

- Der Graph schneidet die x-Achse an den Stellen $x = -1$ und $x = 3$. Diese beiden x-Koordinaten heißen *Nullstellen* der Funktion, weil der Funktionswert y an diesen Stellen gleich 0 ist.
- Der Graph fällt im x-Bereich $[-\infty, 1]$ und steigt im x-Bereich $[1, \infty]$. Man sagt daher, dass die Funktion in $[-\infty, 1]$ *streng monoton fallend* ist und in $[1, \infty]$ *streng monoton steigend* (d.h. die Funktionswerte oder y-Werte fallen bzw. steigen).

Definition: Man nennt diejenigen Stellen (also x-Koordinaten) einer Funktion, an denen der Funktionsgraph die x-Achse schneidet oder berührt *Nullstellen*. Dort gilt:

$$f(x) = 0$$

Definition: Wenn für beliebige Stellen x_1 und x_2 aus einem Intervall I einer Funktion (wobei $x_1 < x_2$) gilt, dass

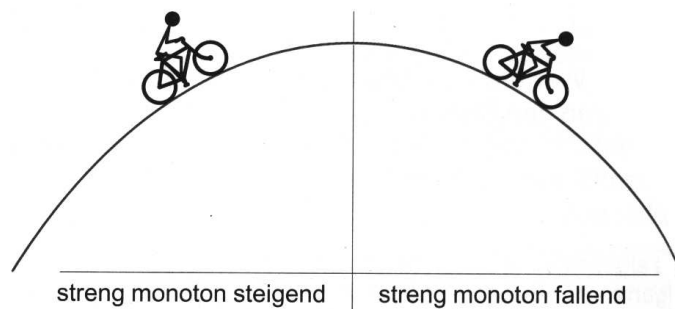
$$f(x_1) < f(x_2)$$

ist, so heißt f *streng monoton steigend* in I.

Gilt stattdessen

$$f(x_1) > f(x_2)$$

so heißt f *streng monoton fallend* in I.



3 Lineare Funktion und Gerade

3.1 Graph einer linearen Funktion

Wir zeichnen die Funktion $y = \frac{1}{2}x + 2$ im Intervall $[-2, 4]$. Wir stellen dazu wieder eine Wertetabelle auf:

x	y
-2	1
-1	1,5
0	2
1	2,5
2	3
3	3,5
4	4

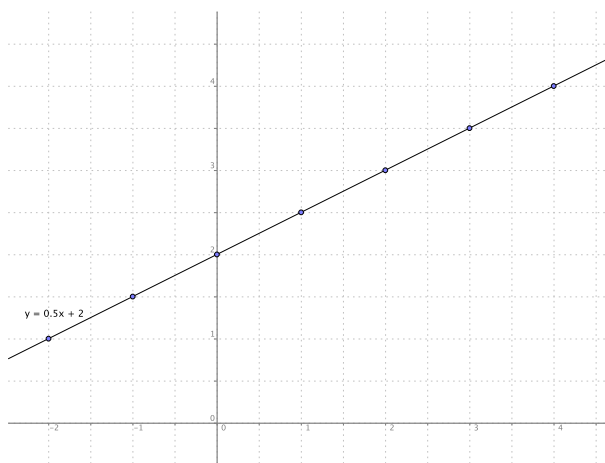


Abbildung 2: $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

Wie man aus der Wertetabelle erkennen kann, ist der Unterschied der y -Werte immer gleich. Erhöht man also x um 1, so steigt y um $\frac{1}{2}$. Wie man auch sieht, gilt dieser Umstand für die gesamte Funktion.

Definition: Eine Funktion mit der Gleichung

$$y = kx + d$$

($k, d \in \mathbb{R}$) heißt *lineare Funktion*.

Der Graph einer linearen Funktion ist eine *Gerade*. (Daher wird die Gleichung $y = kx + d$ auch als Geradengleichung bezeichnet.)

Damit ist das Zeichnen einer Gerade einfach: es genügt, zwei Punkte zu zeichnen und diese zu verbinden!

3.2 Punkt auf einer Geraden

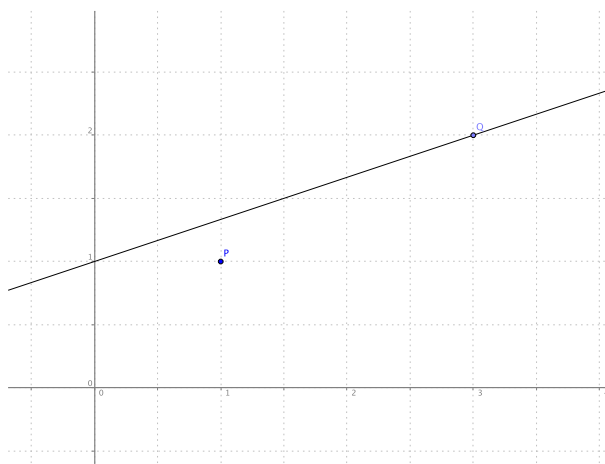
Wir haben die Gleichung der Geraden $y = \frac{1}{3}x + 1$ und wollen rechnerisch feststellen, ob die Punkte $P(1/1)$ und $Q(3/2)$ auf der Geraden liegen.

Ein Punkt liegt auf einer Geraden, wenn seine Koordinaten die Geradengleichung erfüllen!

Das probieren wir einfach aus und setzen die Koordinaten der beiden Punkte ein:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}x + 1 \\ P(1/1) : \quad 1 &= \frac{1}{3} \cdot 1 + 1 \\ &1 \neq \frac{4}{3} \\ Q(3/2) : \quad 2 &= \frac{1}{3} \cdot 3 + 1 \\ &2 = 2 \end{aligned}$$

Der Punkt P liegt also nicht auf der Geraden, der Punkt Q hingegen schon:



Demnach ist es möglich, mittels der Geradengleichung *jeden beliebigen Punkt auf der Geraden* zu berechnen. Man setzt dazu einfach den gewünschten x-Wert in die Gleichung ein und berechnet den dazugehörigen y-Wert.

z.B.: $x = 2$

$$y = \frac{1}{3}x + 1$$

$$y = \frac{1}{3} \cdot 2 + 1$$

$$y = \frac{5}{3}$$

Also ist der Punkt $(2/\frac{5}{3})$ ein Punkt auf der Geraden $y = \frac{1}{3}x + 1$

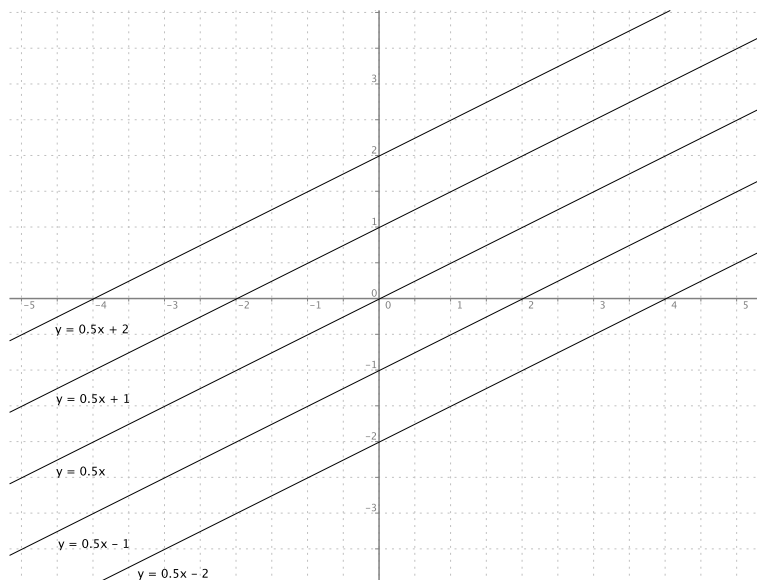
3.3 Die Bedeutung von k und d

Wir wissen nun, dass die allgemeine Geradengleichung $y = kx + d$ lautet. Welche Bedeutung haben aber dieses k und d für die Gerade?

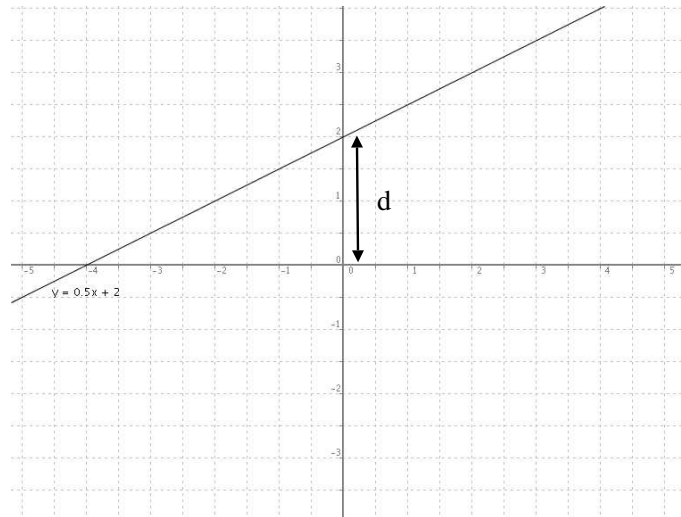
Wir probieren dies einfach aus und betrachten eine Gerade und verändern ihr d :

$$y = \frac{1}{2}x + d$$

Wir zeichnen diese Gerade mit $d = -2, -1, 0, 1, 2$ und sehen uns das Ergebnis einmal an:



Alle diese Geraden sind *parallel* und nur nach oben bzw. unten verschoben.



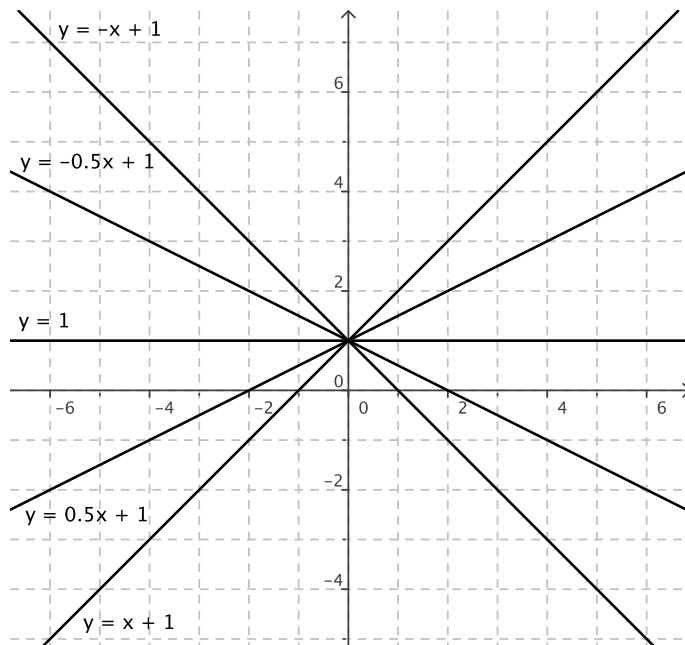
d ist der Wert, um den die Gerade entlang der y -Achse nach oben ($d > 0$) oder unter unten ($d < 0$) verschoben wird.

Was aber bedeutet nun k ?

Wir probieren wieder und lassen $d = 1$ unverändert und verändern das k . Hier sind die Graphen von

$$y = kx + 1$$

für $k = 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1$:



k ist der Wert, der die *Steigung* der Geraden angibt.

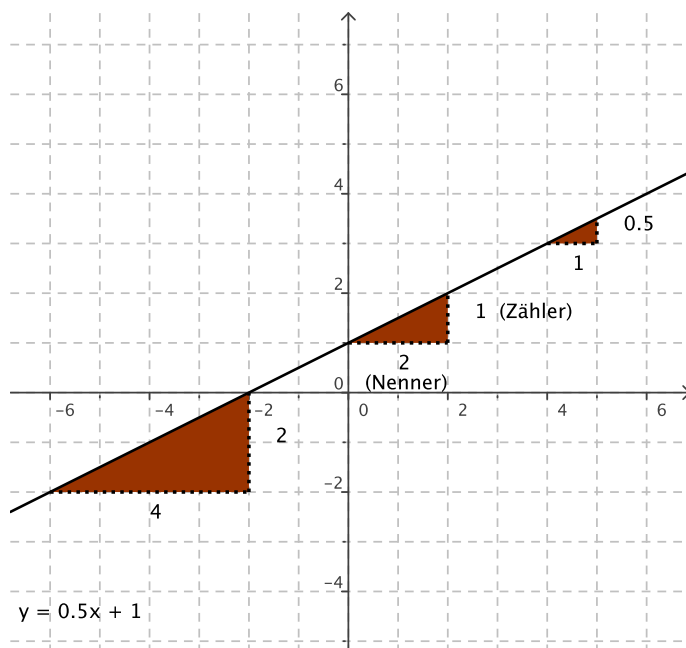
Offensichtlich gilt:

$k > 0$	streng monoton steigend
$k < 0$	streng monoton fallend
$k = 0$	konstant (parallel zur x-Achse)

Das Steigungsdreieck

Betrachten wir die Gerade $y = \frac{1}{2}x + 1$ genauer, dann erkennen wir, dass k ein Steigungsdreieck bildet, wobei

- der *Zähler* der *senkrechten* Seite und
- der *Nenner* der *waagrechten* Seite entspricht.



Da man den Bruch $\frac{1}{2}$ erweitern bzw. kürzen kann, können auch die Steigungsdreiecke größer oder kleiner sein.

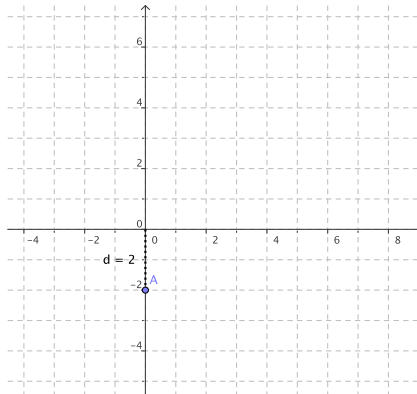
Ein Steigungsdreieck ist (wie aus der Abbildung erkennbar) auch nicht an einen Punkt gebunden. Man kann es *verschieben*.

Zeichnen einer Geraden mit Hilfe von d und k

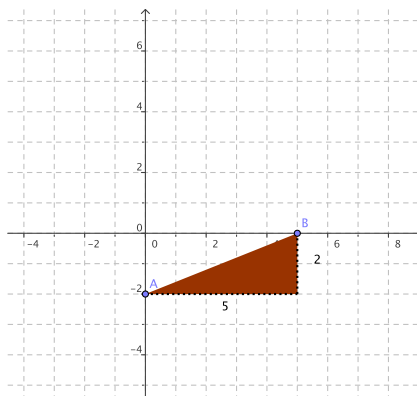
Wir zeichnen die Gerade

$$y = \frac{2}{5}x - 2$$

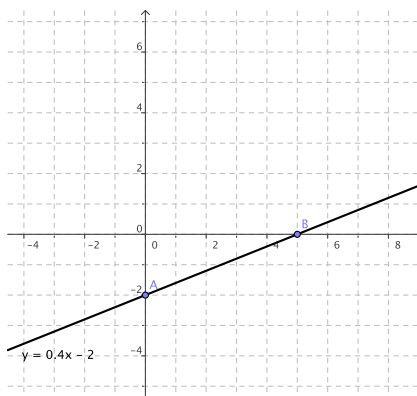
- Zuerst tragen wir $d = 2$ vom Ursprung aus entlang der y -Achse ab (und kommen zum Punkt A)



- Von A aus messen wir den Nenner von k , also 5, waagrecht nach rechts und den Zähler von k , also 2, senkrecht nach oben und kommen zu Punkt B .



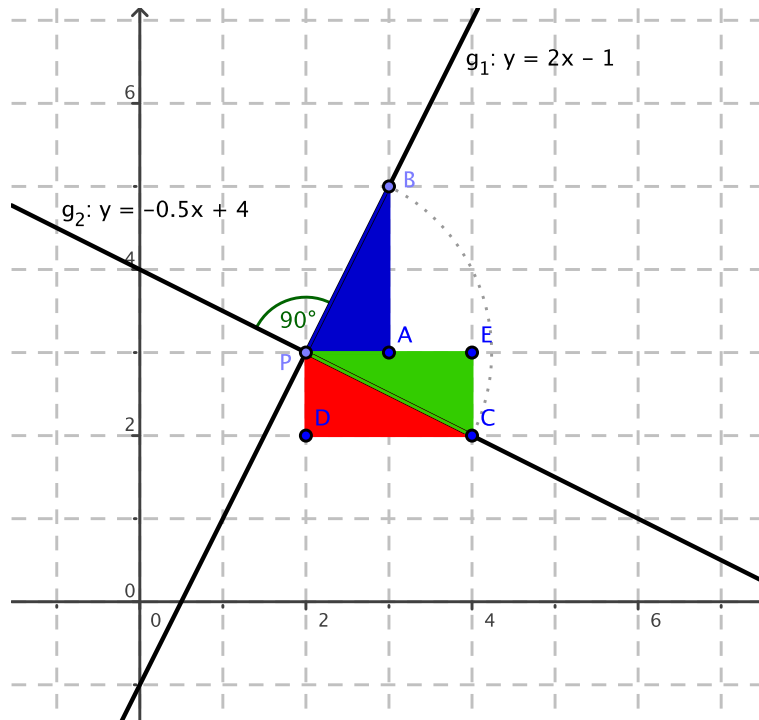
- Nun verbinden wir A und B . Fertig.



3.4 Normale Geraden

Geraden, die im rechten Winkel aufeinander stehen, nennt man *normal* aufeinander.

Gegeben sei die Gerade $g_1 : y = 2x - 1$ und der Punkt $P(2/3)$, der auf g_1 liegt. Wir suchen nun die Gerade, die durch P geht und normal auf g_1 steht.



Wir drehen das Steigungsdreieck von g_1 $\triangle PAB$ um 90° um P und bekommen das Dreieck $\triangle PDC$. Dieses Dreieck ist kongruent (deckungsgleich) zu $\triangle PCE$. Das Dreieck $\triangle PCE$ ist das Steigungsdreieck von g_2 und wir können k_2 ablesen:

$$k_2 = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

g_2 hat daher die Gleichung

$$g_2 : y = -\frac{1}{2}x + d_2$$

Wenn wir P in die Gleichung von g_2 einsetzen, erhalten wir d_2 :

$$3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + d_2 \quad \Rightarrow \quad d_2 = 4$$

Somit lautet die gesuchte Gleichung der Normalen g_2 auf g_1 :

$$g_2 : y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Allgemein: Man erhält die Steigung einer zu g_1 normalen Gerade g_2 (also k_2), indem man den Kehrwert der Steigung von g_1 (also k_1) nimmt und zusätzlich das Vorzeichen ändert:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

z.B.:

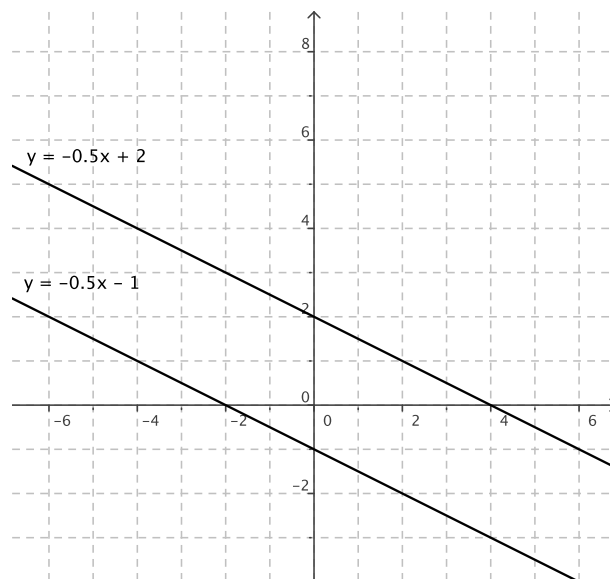
$$k_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = -\frac{1}{2}$$

3.5 Parallele Geraden

Wie wir bereits in Kap. 3.3 gesehen haben, haben parallele Geraden

- gleiches k
- aber unterschiedliches d

z.B.: $y = -\frac{1}{2}x + 2$ und $y = -\frac{1}{2}x - 1$



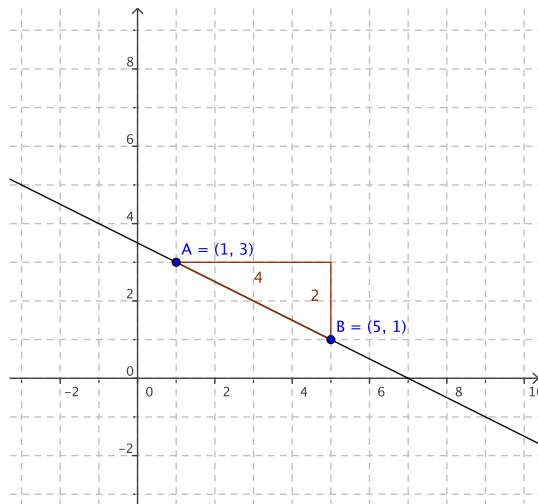
3.6 Gerade durch zwei Punkte

Wir wollen die Gleichung der Geraden durch den Punkt $A(1/3)$ und $Q(5/1)$ bestimmen. Betrachten wir den Graphen und die Lage der Punkte, so können wir erkennen, dass die Steigung durch die Differenz der x- Koordinaten bzw. y-Koordinaten der beiden Punkte A und B gegeben ist:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 3}{5 - 1} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Die Frage ob x_1 und y_1 dabei zum Punkt A oder B gehören, ist egal, denn dreht man die beiden Punkte in der Reihenfolge um, geschieht Folgendes:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{1 - 5} = -\frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$



Den Wert von d erhält man wieder durch Einsetzen eines Punktes (hier A):

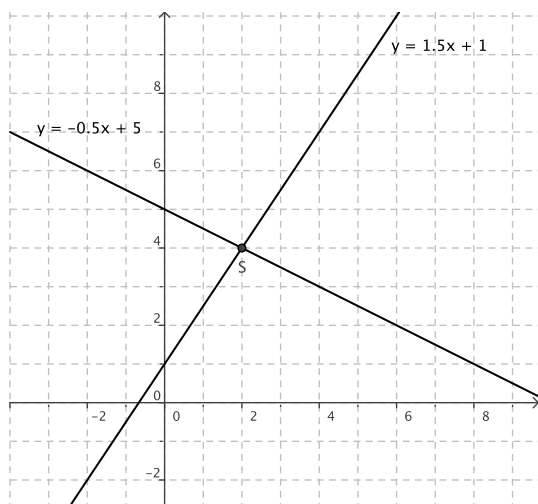
$$3 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + d \Rightarrow d = \frac{7}{2}$$

Die gesuchte Gleichung der Geraden lautet daher:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

3.7 Schnittpunkt zweier Geraden

Wo schneiden sich die Geraden $y = \frac{3}{2}x + 1$ und $y = -\frac{1}{2}x + 5$?



Beide Geraden haben diesen Punkt $S(x/y)$ gemeinsam, d.h. er liegt auf *beiden* Geraden, was bedeutet er erfüllt *beide* Geradengleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{2}x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 5 \end{array} \right\} y = y \Rightarrow \frac{3}{2}x + 1 = -\frac{1}{2}x + 5$$

Wir müssen also folgende Gleichung lösen:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x + 1 &= -\frac{1}{2}x + 5 \\ 3x + 2 &= -x + 10 \\ 4x &= 8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Die fehlende y-Koordinate von S erhalten wir, indem wir 2 in eine der beiden Geradengleichungen einsetzen. Z.B. so:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2} \cdot 2 + 1 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt der Geraden lautet: $S(2/4)$

3.8 Lineare Funktionen in der Praxis

3.8.1 Beispiel 1: Tarifvergleich Mobiltelefon

Es soll geklärt werden, welcher Tarif für welches Gesprächsverhalten billiger ist. Zur Auswahl stehen zwei Tarife eines Mobilfunkbetreibers:

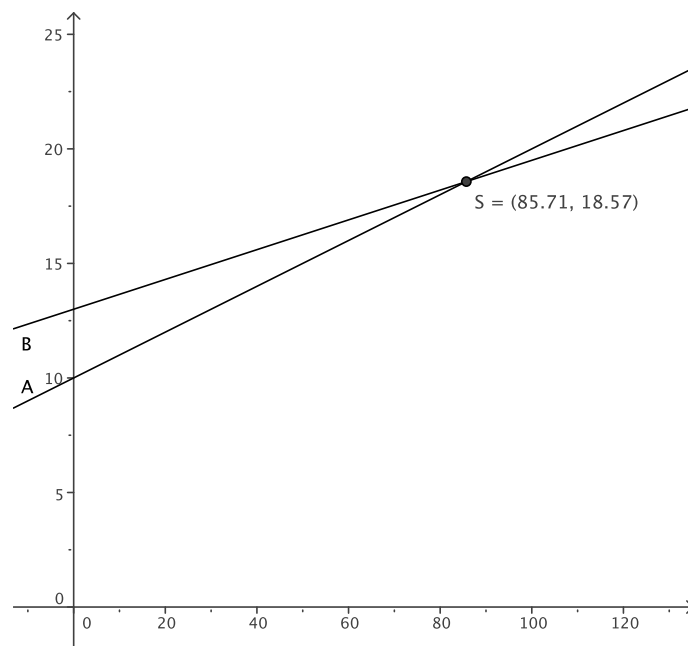
- *Tarif A*: Grundentgelt: € 10,- pro Monat; € 0,10 Verbindungsentgelt pro Minute
- *Tarif B*: Grundentgelt: € 13,- pro Monat; € 0,06 Verbindungsentgelt pro Minute zu drei "Freunden", sonst jedoch € 0,70. Es wird angenommen, dass die Gesprächszeit zu den Freunden die Hälfte der Gesamtgesprächszeit ausmacht.

Funktionsgleichungen:

$R(x)$ ist der Rechnungsbetrag, abhängig von x , den „vertelefontierten“ Minuten.

- *Tarif A*: $R_A(x) = 0,1x + 10$
- *Tarif B*: $R_B(x) = 0,06\frac{x}{2} + 0,7\frac{x}{2} + 13 = 0,065x + 13$

Graphen:



Berechnung des Schnittpunkts:

$$0,1x + 10 = 0,065x + 13$$

$$0,035x = 3$$

$$x \approx 85,7$$

Man kann also gut erkennen, dass Tarif A bis ca. 86 Minuten billiger ist und darüber Tarif B.

3.8.2 Beispiel 2: Weg-Zeit-Funktion

Ein LKW und ein PKW fahren von Salzburg nach Graz (260 km). Der LKW fährt mit einer mittleren Geschwindigkeit von 60 km/h, der PKW mit 90 km/h. Der LKW fährt eine Stunde vor dem PKW ab.

- Kann der PKW den LKW einholen?
- Wenn ja - wann?

Der Zusammenhang zwischen Weg, Zeit und Geschwindigkeit lautet:

$$s(t) = v \cdot t$$

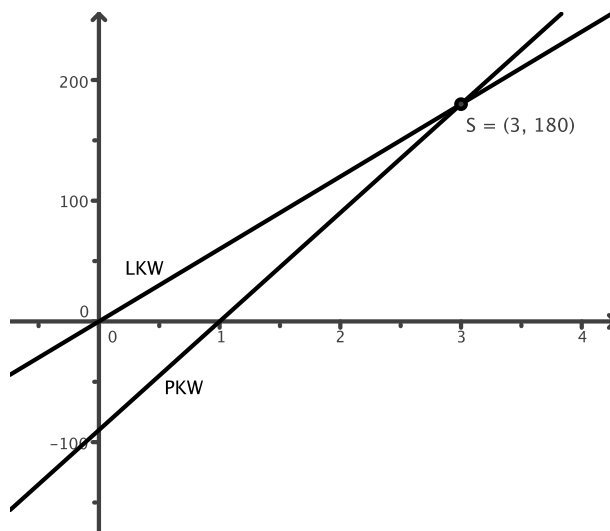
Also: „Weg ist Geschwindigkeit mal Zeit“.

Funktionsgleichungen:

Fahrzeug	Fahrzeit	Geschwindigkeit	Weg
LKW	t	60	$60t$
PKW	$t - 1$	90	$90 \cdot (t - 1)$

- LKW: $s_L(t) = 60t$
- PKW: $s_P(t) = 90(t - 1) = 90t - 90$

Graphen:



Berechnung des Schnittpunkts:

$$60t = 90t - 90$$

$$90 = 30t$$

$$3 = t$$

Der PKW holt den LKW zum Zeitpunkt $t = 3$ ein. (D.h. der LKW ist 3 Stunden und der PKW 2 Stunden unterwegs.)