Folgen

Mag. Martin Bruckbauer

19. Oktober 2004

1 Einführung

Wie geht's weiter?

- $1 \ldots 2 \ldots 3 \ldots ?$
- $0 \ldots 5 \ldots 10 \ldots ?$
- $2 \ldots 4 \ldots 8 \ldots ?$
- $1 \ldots 3 \ldots 6 \ldots 10 \ldots ?$
- $32 \ldots 16 \ldots 8 \ldots ?$
- $1 \ldots 1 \ldots 2 \ldots 3 \ldots 5 \ldots ?$ (Fibonacci-Folge)

Definition: Eine (endliche/unendliche) Folge ist darstellbar durch eine Funktion, deren Definitionsmenge die Menge $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ..., k\}$ ist.

Schreibweise: $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, ...a_n \rangle$ oder $\langle 2, 4, 6, ..., 10 \rangle$

1.1 Arten der Darstellung von Folgen

Es gibt zwei Arten der Darstellung von Folgen.
Betrachten wir die Folge $\langle 2, 4, 6, ... \rangle$:

1. **rekursive Darstellung**
   Bei der rekursiven Darstellung wird angegeben, wie aus dem vorhergehenden das folgende Folgenglied gebildet wird:

   $$a_1 = 2 \qquad a_n = a_{n-1} + 2$$

   Der Nachteil dieser Darstellung ist, dass nicht jedes beliebige Folgenglied direkt berechnet werden kann.

2. **explizite Darstellung**
   Bei der expliziten Darstellung wird angegeben, wie aus dem ersten jedes beliebige Folgenglied berechnet werden kann. (Es muss nicht zwingend genau das erste Folgenglied sein.)
   $$a_1 = 2 \qquad a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2$$
   Die explizite Darstellung ist meist praktikabler, es gibt jedoch Folgen, die man nicht explizit darstellen kann.

Wie kann man unsere Eingangsbeispiele sowohl rekursiv als auch explizit darstellen?

- $\langle 1, 2, 3, ... \rangle$:
  rekursiv: $a_1 = 1 \qquad a_n = a_{n-1} + 1$
  explizit: $a_n = 1 + (n-1) \cdot 1$
- $\langle 0, 5, 10, ... \rangle$:
  rekursiv: $a_1 = 0 \qquad a_n = a_{n-1} + 5$
  explizit: $a_n = (n-1) \cdot 5$
- $\langle 2, 4, 8, ... \rangle$:
  rekursiv: $a_1 = 2 \qquad a_n = a_{n-1} \cdot 2$
  explizit: $a_n = 2^n$
- $\langle 1, 3, 6, 10, ... \rangle$:
  rekursiv: $a_1 = 1 \qquad a_n = a_{n-1} + n$
  explizit: $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\langle 32, 16, 8, ... \rangle$:
  rekursiv: $a_1 = 32 \qquad a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$
  explizit: $a_n = \frac{32}{2^{n-1}}$
- $\langle 1, 1, 2, 3, 5, ... \rangle$ (Fibonacci-Folge):
  rekursiv: $a_1 = 1$ $a_2 = 1 \qquad a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$
  explizit: $a_n = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}^n}{\sqrt{5}}$
  Anmerkung: Die Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033$ ist die Zahl des „Goldenen Schnitts".

1.2 Spezielle Folgen

Definition: Eine *arithmetische Folge* ist eine Folge, bei der die Differenz d zweier Nachbarglieder konstant ist.

$$a_n = a_{n-1} + d \qquad a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

z.B. $\langle 3, 6, 9, ...\rangle$: $a_n = 3 + (n-1) \cdot 3$

Definition: Eine *geometrische Folge* ist eine Folge, bei der der Quotient q zweier Nachbarglieder konstant ist.

$$b_n = b_{n-1} \cdot q \qquad b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

z.B. $\langle 3, 6, 12, ...\rangle$: $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

1.3 Summen von endlichen Folgen

Der Mathematiker Carl Friedrich Gauss bekam von seiner Lehrerin in der Schule der Legende nach eine Strafaufgabe, bei der er die Zahlen von 1 bis 100 addieren sollte. Die Lehrerin staunte damals nicht schlecht, als Carl Friedrich innerhalb einer Minute das Ergebnis präsentierte.
Er stellte dabei folgende Überlegung an:

$$1 + 100 = 101 \qquad 2 + 99 = 101 \qquad 3 + 98 = 101 \qquad \text{usw.}$$

Jeweils das erste mit dem letzten Folgenglied addiert, ergeben das Gleiche, wie das zweite mit dem vorletzten addiert usw. Er brauchte sich also nur noch zu überlegen, wie viele solcher Additionen notwendig sind und das sind offensichtlich genau die Hälfte der Anzahl der Folgenglieder, also 50. Daher lautet das Ergebnis seiner „Strafaufgabe“:

$$1 + 2 + 3 + ...98 + 99 + 100 = \frac{100}{2} \cdot (1 + 100) = 50 \cdot 101 = 5050$$

Daher ist auch die folgende Formel nach ihm „Gauss'sche Summenformel“ benannt:

Summe s_n der ersten n Folgenglieder einer endlichen arithmetischen Folge:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Auch für die geometrische Folge läßt sich (allerdings mit anderen Überlegungen) eine Summenformel angeben:

Summe s_n der ersten n Folgenglieder einer endlichen geometrischen Folge:

$$s_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

2 Monotonie von Folgen

Betrachten wir die Folgen $\langle 1, 2, 3, 4, ...\rangle$ bzw. $\left\langle 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, ...\right\rangle$ so sehen wir, dass jedes Glied größer bzw. kleiner als das unmittelbar vorgehende ist. Also:

$1 < 2 < 3 < 4 < ...$ bzw. $1 > \frac{1}{10} > \frac{1}{100} > \frac{1}{1000} > ....$

Definition: Eine Folge heißt *monoton wachsend*, wenn gilt:

$$a_{n+1} \geq a_n$$

Eine Folge heißt *monoton fallend*, wenn gilt:

$$a_{n+1} \leq a_n$$

Folgen heißen *streng* monoton wachsend bzw. fallend, wenn gilt:

$$a_{n+1} > a_n \qquad \text{bzw.} \qquad a_{n+1} < a_n$$

Überprüfung der Monotonie

z.B. $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right\rangle$
Zunächst berechnet man einige Folgenglieder um eine Vermutung der Monotonie aufzustellen: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{5}{9}$. Daher kann man vermuten, dass diese Folge monoton fallend ist.

Vermutung: $a_{n+1} \leq a_n$

Beweis:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\leq a_n \\
\frac{2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} &\leq \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \qquad\qquad | \cdot n^2 (n+1)^2 \\
2n^2 (n+1) - n^2 &\leq 2n (n+1)^2 - (n+1)^2 \\
2n^3 + 2n^2 - n^2 &\leq 2n \left(n^2 + 2n + 1\right) - \left(n^2 + 2n + 1\right) \\
2n^3 + 2n^2 - n^2 &\leq 2n^3 + 4n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1 \\
0 &\leq 2n^2 - 1 \\
1 &\leq 2n^2 \\
\frac{1}{2} &\leq n^2 \\
\mathbb{L} &= \mathbb{N}^* \qquad\qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Also haben wir bewiesen, dass diese Folge monoton fallend ist. (Es gilt sogar *streng* monoton fallend, weil auch $\frac{1}{2} < n^2$ die Lösungsmenge $\mathbb{N}^*$ ergibt.)

3 Schranken von Folgen

Betrachtet man folgende Folge: $\langle a_n \rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ... \right\rangle$, so ist offensichtlich, dass alle Folgenglieder im Intervall [0,1] liegen müssen.

Definition: Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt *beschränkt*, wenn es zwei reelle Zahlen X und Y gibt, sodass für alle Folgenglieder gilt:

$$X \leq a_n \leq Y$$

X wird als *untere Schranke* bezeichnet, Y als *obere Schranke*.
Die größte untere Schranke heißt *Infimum* und die kleinste obere Schranke heißt *Supremum*.

z.B. Gegeben ist die monoton steigende Folge $\left\langle \frac{3n+1}{n+1} \right\rangle$. Ist a.) $\frac{5}{2}$ b.) 4 eine obere Schranke?

Lösung a.):

$$\begin{aligned} a_n &\leq \frac{5}{2} \text{ ?} \\ \frac{3n+1}{n+1} &\leq \frac{5}{2} \\ 6n+2 &\leq 5n+5 \\ n &\leq 3 \\ \mathbb{L} &= \{1,2,3\} \;\; (\neq \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

$\frac{5}{2}$ ist keine obere Schranke.

Lösung b.):

$$\begin{aligned} a_n &\leq 4 \text{ ?} \\ \frac{3n+1}{n+1} &\leq 4 \\ 3n+1 &\leq 4n+4 \\ 0 &\leq n+3 \\ \mathbb{L} &= \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

4 ist eine obere Schranke.

4 Grenzwert von Folgen

Betrachtet man die Folge $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ... \right\rangle$ so kann man erkennen, dass die Folgenglieder immer kleiner werden, sich also 0 annähern ohne jemals 0 zu erreichen. Andererseits wissen wir auch, dass 0 eine untere Schranke der Folge $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ ist.

Man nennt 0 *Grenzwert* oder *Limes* der Folge $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$. (Folgen, die 0 als Grenzwert haben, heißen *Nullfolgen*).

(Die mathematisch exakte Definition wollen wir hier vernachlässigen).

4.1 Schreibweise

Hat eine Folge $\langle a_n \rangle$ einen Grenzwert und ist dieser Grenzwert a, dann schreibt man:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Für unsere Folge $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ bedeutet das z.B.:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

4.2 Berechnung eines Grenzwertes

Zur Berechnung von Grenzwerten ist es vorteilhaft, die gegebene Folge in Nullfolgen zu zerlegen. Nullfolgen sind Folgen, die den Grenzwert 0 haben. Beispiele für solche *Nullfolgen* sind Brüche, die im Nenner schneller wachsen als im Zähler, z.B.:

$$\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$$
$$\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n^2} \right\rangle$$
$$\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n}{n^2+n+1} \right\rangle$$
$$\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{2n-1} \right\rangle$$

Wenn wir z.B. folgenden Limes berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right)$$

Dann zerlegen wir den Ausdruck $\left(3 - \frac{1}{n}\right)$ in Teilfolgen, deren Limes wir extra berechnen[1]:

$$\lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 3 - 0 = 3$$

Die Teilfolge 3 verändert sich nicht und von der Teilfolge $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ wissen wir, dass sie gegen 0 strebt.

Oft muss man einen kleinen Trick anwenden. Beispielsweise bei dieser Folge:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n+5}{2n^2+6n-1}$$

[1] Wir vernachlässigen hier die verwendeten Grenzwertsätze.

Zur Berechnung dieses Grenzwerts dividiert man jeden Summand im Zähler und Nenner durch die *höchste Potenz von* n (hier n^2):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2} - \frac{4n}{n^2} + \frac{5}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{6n}{n^2} - \frac{1}{n^2}}$$

nach dem Kürzen sieht die Folge dann so aus:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{6}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

Und nun bestimmen wir die Grenzwerte der einzelnen Teilfolgen und wir erhalten:

$$\frac{3-0+0}{2+0-0} = \frac{3}{2}$$

Beispiele:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+5n}{2n^3+6n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{4n^2}{n^3} + \frac{5n}{n^3}}{\frac{2n^3}{n^3} + \frac{6n^2}{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{6}{n}} = \dfrac{0+0}{2+0} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-1}{3n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 - \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{1}{n^2}} = \dfrac{2-0}{3-0} = \dfrac{2}{3}$