Finanzmathematik

Mag. Martin Bruckbauer

7. März 2005

1 Zinsrechnung

Die Berechnung von Zinsen erfolgt sehr unterschiedlich. Möglich ist die Veränderung der

- Anzahl der Zinsperioden (Zeitabstände der Verzinsung)
- Fälligkeit der Zinsen (am Beginn oder am Ende der Zinsperiode)
- Berechnungsbasis (werden Zinsen aus früheren Zinsperioden mitverzinst oder nicht)

Begriffe:

- *Barwert* eines Kapitals = Kapital *am Beginn* eines Verzinsungszeitraums
- *Endwert* eines Kapitals = Kapital *am Ende* eines Verzinsungszeitraums
- *p.a.* = pro Jahr (per anno)
- *p.s.* = pro Semester (6 Monate)
- *p.q.* = pro Quartal (3 Monate)

Anmerkung 1:

1 Monat = 30 Tage 1 Jahr = 360 Tage

Anmerkung 2:
Die Verzinsung beginnt am Folgetag und endet am Vortag! [1]

[1] In der Praxis gilt: nächster Werktag bzw. vorhergehender Werktag - das werden wir jedoch vernachlässigen

1.1 Einfache Verzinsung

Einfache Verzinsung bedeutet, dass die Zinsen *einmal berechnet* werden und sich nicht verändern (d.h. Zinsen aus früheren Zinsperioden werden nicht mitverzinst, wie das beim Zinseszins der Fall ist).

1.1.1 Dekursive/nachschüssige Verzinsung (einfacher Zins)

Dekursiv bzw. nachschüssig bedeutet, dass die Zinsen am Ende der Zinsperiode anfallen.

Beispiel:
€ 10.000,- werden 3 Jahre zu 12% p.a. verliehen. Nach den 3 Jahren müssen € 10.000,- + die angefallenen Zinsen zurückgezahlt werden. Wie hoch ist die Gesamtrückzahlung?

Am Ende jeden Jahres kommen 12% von 10.000 dazu:

$$\text{Zinsen} = \underbrace{10000 \cdot 0,12}_{\text{nach dem 1. Jahr}} + \underbrace{10000 \cdot 0,12}_{\text{nach dem 2. Jahr}} + \underbrace{10000 \cdot 0,12}_{\text{nach dem 3. Jahr}} = 3 \cdot 0,12 \cdot 10000$$

Der Endwert beträgt also:

$$K_3 = 10000 + 3 \cdot 0,12 \cdot 10000 = 13600$$

oder kürzer:

$$K_3 = 10000 \cdot (1 + 3 \cdot 0,12)$$

Allgemein:

> **Einfacher dekursiver Zins**:
>
> $$K_n = K_0 \cdot (1 + ni)$$
>
> | | |
> |---|---|
> | K_n | Endwert des Kapitals |
> | K_0 | Anfangswert des Kapitals (Barwert) |
> | n | Verzinsungsdauer in Zinsperioden |
> | i | Zinssatz pro Zinsperiode |

Beispiele

- $K_0 = 7200$, Zinssatz: $i = 0,0425$, Dauer: 8 Monate, Endwert=?
  $K_{\frac{8}{12}} = 7200 \cdot \left(1 + \frac{8}{12} \cdot 0,0425\right) = 7404$
- $K_n = 1524,38$, Zinssatz: $i = 0,045$, Dauer: von 9.5. bis 20.9.
  Barwert=?
  Mai: $30 - 9 = 21$ Tage

Juni, Juli, August: je 30 Tage = 90 Tage
September: 19 Tage
also insgesamt: $21 + 90 + 19 = 130$ Tage

$$\begin{aligned}
1524,38 &= K_0 \cdot \left(1 + \frac{130}{360} \cdot 0,045\right) \\
1524,38 &= K_0 \cdot 1,01625 \\
1500 &= K_0
\end{aligned}$$

- $K_0 = 2580,-$, $i = 0,055$, $K_n = 2636,76$.
  Wie lange ist die Verzinsungsdauer n?

$$\begin{aligned}
2636,76 &= 2580 \cdot (1 + n \cdot 0,055) \\
1,022 &= 1 + n \cdot 0,055 \\
0,022 &= n \cdot 0,055 \\
0,4 &= n
\end{aligned}$$

  In Tagen: $0,4 \cdot 360 = 144$ Tage

1.1.2 Antizipative/vorschüssige Verzinsung (kaufmännischer Diskont)

Antizipativ bzw. vorschüssig bedeutet, dass die Zinsen bereits am Beginn der Zinsperiode anfallen.

Beispiel:
Jemand leiht sich € 10.000,- aus und will sie in 3 Jahren zurückzahlen. Die 12% Zinsen werden sofort fällig. Wie viel bekommt er wirklich ausbezahlt?

$$K_0 = 10000 - 3 \cdot 0,12 \cdot 10000 = 6400$$

oder kürzer:

$$K_0 = 10000 \cdot (1 - 3 \cdot 0,12)$$

Allgemein:

Einfacher antizipativer Zins (kaufmännischer Diskont):

$$K_0 = K_n \cdot (1 - nd)$$

K_n	Endwert des Kapitals (entlehnter Betrag - ist zurück zu zahlen)
K_0	Anfangswert des Kapitals (Auszahlungsbetrag - bekommt man wirklich)
n	Verzinsungsdauer in Zinsperioden
d	Diskontsatz pro Zinsperiode

Beispiele

- Welchen Betrag erhält man für einen in 4 Monaten fälligen Wechsel über € 2.000,-, der mit $d = 9\%$ p.a. diskontiert wird? (Ein Wechsel lautet immer auf den Betrag, der zurückzuzahlen ist, also auf K_n.)

$$K_0 = 2000 \cdot \left(1 - \frac{4}{12} \cdot 0,09\right) = 1940$$

- Eine in 60 Tagen fällige Rechnung über € 9.600,- wird unter Abzug von € 64,- sofort bezahlt. Welchem Diskontsatz entspricht dieser Abzug?

$$9536 = 9600 \cdot \left(1 - \frac{60}{360} \cdot d\right) \Rightarrow d = 0,04$$

  Dieser Abzug entspricht also 4% p.a.

1.1.3 Unterjährige Kapitalisierung

Bisher haben wir immer jährliche Zinsen (p.a.) berechnet. In der Praxis gibt es allerdings auch Zinsen, die mehrmals im Jahr (z.B. halbjährlich, vierteljährlich oder monatlich) berechnet werden. Hier spricht man von *unterjähriger Kapitalisierung*.
Zur Berechnung gelten die gleichen Formeln, allerdings müssen Zinssatz i und Verzinsungsdauer n aneinander angepasst werden:

i	$\rightarrow$ p.a.	(per anno = jährlich)
i_2	$\rightarrow$ p.s.	(pro Semester = halbjährlich)
i_4	$\rightarrow$ p.q.	(pro Quartal = vierteljährlich)
i_{12}	$\rightarrow$ p.m.	(pro Monat = monatlich)

Beispiele

- Berechne den Endwert K_n für $K_0 = 100$, $i_4 = 1\%$, 8 Monate (einfacher dekursiver Zins):
  Die Anzahl n der Zinsperioden vervierfacht sich, daher:
  $K_{\frac{8}{12}} = 100 \cdot \left(1 + \frac{8}{12} \cdot 4 \cdot 0,01\right) = 102,67$

- Berechne den Endwert K_n für $K_0 = 100$, $i_2 = 3\%$, 4,5 Monate (einfacher dekursiver Zins):
  Die Anzahl n der Zinsperioden verdoppelt sich, daher:
  $K_{4,5} = 100 \cdot \left(1 + \frac{4,5}{12} \cdot 2 \cdot 0,03\right) = 102,25$

1.2 Dekursiver Zinseszins (Theoretische Verzinsung)

Im Gegensatz zur einfachen Verzinsung werden bei der Zinseszinsrechnung die bereits angefallenen Zinsen aus früheren Zinsperioden bei der Berechnung der Zinsen mitgerechnet. Die Zinsen werden also auch verzinst.

Beispiel:
Auf welchen Wert wächst ein Kapital von € 3000 bei $i = 6\%$ p.a. in 3 Jahren an, wenn die Zinsen jeweils am Ende des Jahres dazugeschlagen werden und am Ende des nächsten Jahres mitverzinst werden?

$$\begin{aligned}
K_0 &= 3000 \\
K_1 &= 3000 &&+ 3000 \cdot 0,06 &&= 3180 \\
K_2 &= 3180 &&+ 3180 \cdot 0,06 &&= 3370{,}8 \\
K_3 &= 3370{,}8 &&+ 3370,8 \cdot 0,06 &&= 3573{,}048
\end{aligned}$$

allgemein betrachtet:

$$\begin{aligned}
&K_0 \\
&K_1 &&= K_0 + K_0 \cdot i &&= K_0(1+i) \\
&K_2 &&= K_1 + K_1 \cdot i &&= K_1(1+i) &&= K_0(1+i)(1+i) &&= K_0(1+i)^2 \\
&K_3 &&= K_2 + K_2 \cdot i &&= K_2(1+i) &&= K_0(1+i)(1+i)^2 &&= K_0(1+i)^3 \\
&\vdots \\
&K_n &&= K_{n-1} + K_{n-1} \cdot i &&= K_{n-1}(1+i) &&= K_0(1+i)(1+i)^{n-1} &&= K_0(1+i)^n
\end{aligned}$$

Allgemein:

Dekursiver Zinseszins:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$$

K_n	Endwert des Kapitals
K_0	Anfangswert des Kapitals
n	Verzinsungsdauer in Zinsperioden
i	Zinssatz pro Zinsperiode

Beispiele:

- $K_0 = 900 \quad i = 5\frac{5}{8}\% \quad 9$ Jahre $\quad K_n = ?$
  $K_n = 900 \cdot (1 + 0,05625)^9 = 1472,80$
- $K_0 = 3600 \quad i_2 = 6\frac{5}{12}\% \quad 3$ Jahre $\quad K_n = ?$
  $K_n = 3600 \cdot (1 + 0,064167)^6 = 5228,30$ (Exponent 6, weil i_2![2])
- $K_8 = 9000 \quad i_2 = 2\% \quad K_0 = ?$
  $9000 = K_0 \cdot (1 + 0,02)^{16} \quad \Rightarrow \quad K_0 = 6556,01$

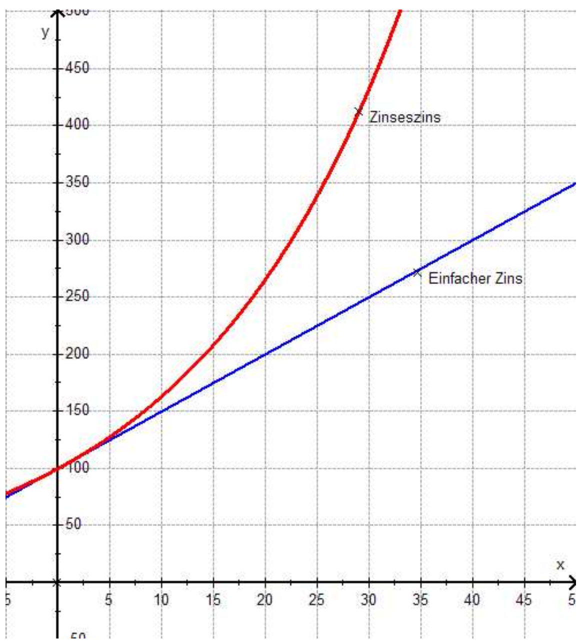
[2] Unterjährige Kapitalisierung

1.3 Vergleich Einfacher Zins - Zinseszins

Wir betrachten nun das Kapital $K_0 = 100$ mit $i = 5\%$ und vergleichen das Anwachsen bei (1) einfachem Zins und (2) dekursivem Zinseszins:

$$K_n = 100 \cdot (1 + n \cdot 0,05) \tag{1}$$
$$K_n = 100 \cdot 1,05^n \tag{2}$$

Einfacher Zins		Diff.[3]	**Zinseszins**		Diff.
K_0	100		K_0	100	
K_1	105	5	K_1	105	5
K_2	110	5	K_2	110,25	5,25
K_3	115	5	K_3	115,76	5,51
K_4	120	5	K_4	121,55	5,79
K_5	125	5	K_5	127,63	6,08
K_6	130	5	K_6	134,01	6,38
K_7	135	5	K_7	140,71	6,7
K_8	140	5	K_8	147,75	7,04
K_9	145	5	K_9	155,13	7,38
K_{10}	150	5	K_{10}	162,89	7,76



Während bei den einfachen Zinsen das Wachstum immer gleich bleibt (es kommt immer 5 dazu), steigt der Zuwachs beim Zinseszins kontinuierlich. Man spricht daher bei den einfachen Zinsen auch von *linearem Wachstum* und bei Zinseszinsen auch von *exponentiellem Wachstum.*

1.4 Gemischte (praktische) Verzinsung - Das Sparbuch

Wir haben die Zinseszinsformel $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ bisher für beliebige, also auch nichtganzzahlige Werte von n verwendet. Dies ist zwar *theoretisch* möglich (*theoretische Verzinsung*), wird in der Praxis jedoch eher nicht verwendet. Beim Sparbuch ist es beispielsweise so, dass die Formel für den dekursiven Zinseszins nur für den ganzzahligen Teil von n verwendet wird, und der Rest mit einfachen Zinsen berechnet wird. Hierbei spricht man von *praktischer* bzw. **gemischter Verzinsung**.

Beispiel:
Auf welchen Wert wächst ein mit $i = 5\%$ p.a. angelegtes Kapital von € 3000 in 4 Jahren und 3 Monaten bei gemischter Verzinsung?

Der ganzzahlige Teil von n ist mit der Zinseszinsformel zu berechnen:

$$K_4 = 3000 \cdot (1+0,05)^4 = 3646,52$$

Dieser Betrag wird nun für den restlichen Teil von n einfach verzinst:

$$K_{4,25} = 3646,52 \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0,05\right) = 3692,10$$

Das Endkapital beträgt € 3692,10.

Zusammengefasst haben wir so gerechnet:

$$K_{4,25} = 3000 \cdot (1+0,05)^4 \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0,05\right) = 3692,10$$

Allgemein:[4]

gemischte (praktische) Verzinsung:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1 + n' \cdot i)$$

n	ganzzahliger Teil von n ($n \in \mathbb{N}^+$)
n'	nichtganzzahliger Teil von n ($n' \in \mathbb{R}^+$)

[4] In der Praxis ist es bei Sparbüchern üblich, Zinsen zu einheitlich festgelegten Terminen (*Zinsterminen*) zu berechnen (z.B. Ende eines Kalenderjahres) und dem Kapital zuzuschlagen. In diesem Fall wird bis zum ersten Zinstermin mit einfachem Zins gerechnet, ganze Zinsperioden mit Zinseszins und die letzte Zinsperiode ev. wieder mit einfachem Zins.

Beispiel:
Ein Kapital von € 850 wurde am 1.6.2001 zu 3,5% p.a. (gemischte Verzinsung) angelegt. Auf welchen Betrag ist es am 16.9.2004 angewachsen?

06.01	29 T
07.01 - 08.04	38 M = 1140 T
09.04	15 T
Summe	1184 T = **3 J** (g) **104 T** (t)

$$K_n = 850 \cdot (1 + 0,035)^3 \cdot (1 + \frac{104}{360} \cdot 0,035) = 951,94$$

Der Endbetrag ist € 951,94.

1.5 Äquivalente Zinssätze

Im Zusammenhang mit unterjähriger Kapitalisierung, also wenn Zinsen in Zinseperioden, die kürzer als ein Jahr sind, berechnet werden (p.s., p.q., p.m., ...), stellt sich die Frage nach gleichwertigen (*äquivalenten*) Zinssätzen. Oft wird auch ein *nomineller Jahreszinssatz* angegeben.
Äquivalente Zinssätze ergeben in gleichen Zeiträumen aus gleichen Barwerten gleiche Endwerte und umgekehrt!

Begriff: *nomineller Jahreszinssatz* ($\neq i$)!
z.B.: 8% nomineller Jahreszins p.s. bedeutet, dass $i_2 = 4\%$ ist. Das bedeutet aber nicht, dass $i = 8\%$ ist!

Welcher Zinssatz i entspricht nun i_2? (Welcher Zinssatz i ist zu i_2 *äquivalent*?)

$$\begin{aligned} (1 + i_2)^2 &= 1 + i \\ (1 + 0,04)^2 &= 1 + i \\ 1,0816 &= 1 + i \\ 0,0816 &= i \end{aligned}$$

Der zu Semesterzinssatz i_2 äquivalente Jahreszinssatz i beträgt also 8,16%. (Und ist zum nominellen Jahresszinssatz verschieden!)

Beispiele:

- Berechne den äquivalenten Zinssatz i_4 zu $i = 5\%$!

$$\begin{aligned} 1 + 0,05 &= (1 + i_4)^4 \\ \sqrt[4]{1,05} - 1 &= i_4 \\ 0,0123 &= i_4 \end{aligned}$$

- Berechne den äquivalenten Zinssatz i_2 zu $i_{12} = 3\%$!

$$\begin{aligned} (1+0,03)^{12} &= (1+i_2)^2 \\ \sqrt{1,03^{12}} - 1 &= i_2 \\ 0,1941 &= i_2 \end{aligned}$$

2 Rentenrechnung

Definition:
Unter einer *Rente* versteht man eine Folge von Zahlungen *gleicher Größe* in *gleichen Zeitabständen.* Die Aufgabe der Rentenrechnung besteht in der Ermittlung des Gesamtwerts zu bestimmten Zeitpunkten der Rentenzahlungen. Die Rentenraten werden dabei dekursiv verzinst.

Beispiel:
Jemand zahlt 4 Jahre lang jeweils am Ende des Jahres € 100,- auf ein Konto ein. Die Einzahlungen werden mit $i = 4\%$ verzinst. Wie groß ist der Endwert nach 4 Jahren?

```
-0-------------1-------------2-------------3-------------4-
 0            100           204          312,16       424,6464
```

$$\begin{aligned} K_0 &= 0 \\ K_1 &= 100 \\ K_2 &= 100 \cdot 1,04 + 100 = 204 \\ K_3 &= (100 \cdot 1,04 + 100) \cdot 1,04 + 100 = \\ &= 100 \cdot 1,04^2 + 100 \cdot 1,04 + 100 = 312,16 \\ K_4 &= (100 \cdot 1,04^2 + 100 \cdot 1,04 + 100) \cdot 1,04 + 100 = \\ &= 100 \cdot 1,04^3 + 100 \cdot 1,04^2 + 100 \cdot 1,04 + 100 = 424,6464 \\ &= 100 \cdot (\underbrace{1,04^3 + 1,04^2 + 1,04 + 1}_{\text{geometrische Reihe}}) \\ &= 100 \cdot \frac{1,04^4 - 1}{1,04 - 1} = 424,6464 \end{aligned}$$

Anmerkung:
Die Summenformel der geometrischen Reihe für

$$s_n = b + bq + bq^2 + bq^3 + bq^4 + ... + bq^{n-1}$$

lautet $(0 \leq q \leq 1)$:

$$s_n = b \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

2.1 Formeln für vor- und nachschüssige Renten

nachschüssige Renten:

$$E_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
$$B_n = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

vorschüssige Renten:

$$E_n = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
$$B_n = \frac{R}{(1+i)^{n-1}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

für beide gilt auch:

$$E_n = B_n \cdot (1+i)^n$$
$$B_n = \frac{E_n}{(1+i)^n}$$

E_n	Endwert der Rente bei n Rentenperioden (z.B. Auszahlungsbetrag bei Bausparer)
B_n	Barwert der Rente bei n Rentenperioden (z.B. Schuld am Beginn)
R	Rentenrate
i	Zinssatz pro Rentenperiode
n	Rentendauer in Rentenperioden

Beispiel zur Berechnung des Barwerts:
Mit welcher einmaligen Zahlung könnte heute eine 3 Mal jeweils am Jahresende fällige Zahlung von € 500,- bei 7% p.a. (dek.) abgelöst werden?

Wir müssen hierfür den Barwert B_3 nach 3 Jahren (nachschüssig) berechnen: Die Formel lautet:

$$B_n = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

daher:

$$B_3 = \frac{500}{1,07^3} \cdot \frac{1,07^3 - 1}{0,07} = \mathbf{1312,158}$$

3 Schuldentilgung

Aus steuerlichen Gründen sind oft nicht nur die Rückzahlungsraten eines Kredits sondern auch die Verteilung der Rückzahlung auf Kredittilgung und Zinsen interessant. Daher werden in manchen Fällen *Tilgungspläne* erstellt, mit denen man die genau Rückzahlung simulieren kann.

Beispiel:
Eine Schuld von € 50.000,– ist bei $i = 4\%$ und nachschüssiger Tilgung in fünf Jahren durch folgende Annuitäten[5] zu tilgen:
$A_1 = 10.000,-$, $A_2 = 8.000,-$; $A_3 = 10.000,-$, $A_4 = 15.000,-$.

Für der Erstellung des Tilgungsplans gehen wir folgendermaßen vor:

- Eintragen der bekannten Annuitäten.
- Zeilenweise Berechnung der Werte:
  - Zinsen ($Z_1 = K_0 \cdot i$)
  - Tilgungsrate ($T_1 = A_1 - Z_1$)
  - Restschuld ($K_1 = K_0 - T_1$)
- Berechnung der letzten Zeile (notwendigerweise gilt: $T_5 = K_4$)

Jahr n	Zinsen der Restschuld Z_n	Tilgungsrate T_n	Annuität A_n	Restschuld K_n
1	2.000,–	8.000,–	10.000,–	42.000,–
2	1.680,–	6.320,–	8.000,–	35.680,–
3	1.427,20	8.572,80	10.000,–	27.107,20
4	1.084,29	13.915,71	15.000,–	13.191,49
5	527,66	13.191,49	13.719,15	0,–
$\sum$	6.719,15	50.000,–	56.719,15	117.978,69

Zur Überprüfung beachten wir:

- Summe der Tilgungsraten muss gleich der ursprünglichen Schuld sein: $\sum T_i = K_0$ (€ 50.000)
- Für die Summe der Zinsen muss gelten: $\sum Z_i = (K_0 + \sum K_i) \cdot i$, also $6.719 = (50.000 + 117.978,69) \cdot 0,04$
- Die Summe der Zinsen und die Summe der Tilgungsraten muss gleich der Summe der Annuitäten sein: $\sum Z_i + \sum T_i = \sum A_i$, also $6.719,15 + 50.000 = 56.719,15$

[5] Unter *Annuität* versteht man das jährlich zu leistende Gesamtfordernis eines Schuldners.

Überblick

Jahr n	Zinsen der Restschuld Z_n	Tilgungsrate T_n	Annuität A_n	Restschuld K_n
n	$K_{n-1} \cdot i$	$A_n - Z_n$	A_n	$K_{n-1} - A_n$

Im letzten Jahr muss $T_n = K_{n-1}$ sein.

Bei regelmäßiger Tilgung sind in der Praxis zwei Arten der Schuldentilgung vorherrschend:

- *Annuitätentilgung*: gleichbleibende Annuitäten A_i (Tilgungsraten nehmen mit der Zeit zu)
- *Ratentilgung*: gleichbleibende Tilgungsraten T_i (Annuität nimmt mit der Zeit ab)

3.1 Annuitätentilgung

Bei der Annuitätentilgung bleiben die Annuitäten (Summe aus Zinsen und Tilgungsrate) konstant.

Beispiel:
Eine Schuld von € 50.000,– ist bei $i = 6,5\%$ zu tilgen. Berechne die beiden ersten und die beiden letzten Zeilen des Tilgungplans, wenn gleich hohe Annuitäten à € 5.000,– nachschüssig zu entrichten sind!

Lösung:
Zunächst berechnen wir die Anzahl der Vollraten mit der Formel für den nachschüssigen Barwert:

$$50000 = \frac{5000}{1,065^n} \cdot \frac{1,065^n - 1}{0,065}$$

$n = 16,67$, also ergibt sich, dass 16 Vollraten zu entrichten sind.

Die Restrate bekommen wir, indem wir die Differenz aus dem Barwert B_{16} und 50.000,– verzinsen:

$$B_{16} = \frac{5000}{1,065^{16}} \cdot \frac{1,065^{16} - 1}{0,065}$$

$$B_{16} = 48838,82$$

$$50000 - 48838,82 = 1161,18$$

Diese Differenz verzinsen wir jetzt über die gesamte Laufzeit und erhalten die letzte Rate:

$$1161,18 \cdot 1,065^{16} = 3180,48$$

Nun können wir die gesuchten Zeilen des Tilgungsplans aufstellen:[6]

Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld
1	3250,00	1750,00	5000,00	48250,00
2	3136,25	1863,75	5000,00	46386,25
...	...	...	...	...
16	499,28	4500,72	5000,00	3180,48
17	206,73	3180,48	3387,21	0,00

Man beachte, dass die Restschuld gleich der Tilgungsrate der letzten Zeile sein muss!

Wie man erkennen kann, sinkt der Anteil der Zinsen an der Annuität zugunsten der Tilgung mit der Zeit an.

3.2 Ratentilgung

Bei der Ratentilgung bleiben die Tilgungsraten konstant, was bedeutet, dass jedes Mal eine andere Annuität zu bezahlen ist.

Beispiel:
Eine Schuld von € 50.000,– ist bei $i = 6,5\%$ zu tilgen. Bestimme die erste und die beiden letzten Zeilen des Tilgungsplans, wenn die Schuld als Ratenschuld in 10 Jahren getilgt wird.

Lösung:
Da die Restschuld eines Jahres durch Subtrahieren der Tilgungsrate von der Restschuld des Vorjahres berechnet wird ($K_n = K_{n-1} - T_n$), wissen wir sofort, dass $\frac{50000}{10} = 5000$ die gleichbleibende Tilgungsrate sein muss. Die restlichen Werte ergeben sich. In der vorletzten Zeile (9) des Tilgungsplans muss die Restschuld € 5.000,– betragen, also lauten die gesuchten Zeilen:

Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld
1	3250,00	5000,00	8250,00	45000,00
...	...	...	...	...
9	650,00	5000,00	5650,00	5000,00
10	325,00	5000,00	5325,00	0,00

Wie man erkennen kann, sinkt die Annuität proportional zur Restschuld (bzw. der Zinsen, die ja aus der Restschuld berechnet werden).

[6] Man kann übrigens bei Annuitätentilgung jede beliebige Restschuld mit folgender Formel berechnen:

$$K_n = K_0 - (A - K_0 \cdot i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$