

# Exponential- und Logarithmusfunktion

Martin Bruckbauer

16. November 2004

## 1 Einführung

### Beispiel 1

Habe 3 Kaninchen, die sich monatlich verdoppeln.

Fragen: Entwicklung des Wachstums? Graph des Wachstums?

$t = 0$	$k = 3$	$= 3 \cdot 2^0$
$t = 1$	$k = 6$	$= 3 \cdot 2^1$
$t = 2$	$k = 12$	$= 3 \cdot 2^2$
$t = 3$	$k = 24$	$= 3 \cdot 2^3$
$t = 4$	$k = 48$	$= 3 \cdot 2^4$
$t = 5$	$k = 96$	$= 3 \cdot 2^5$

Gesetz dieser Entwicklung:

$$f(t) = 3 \cdot 2^t$$

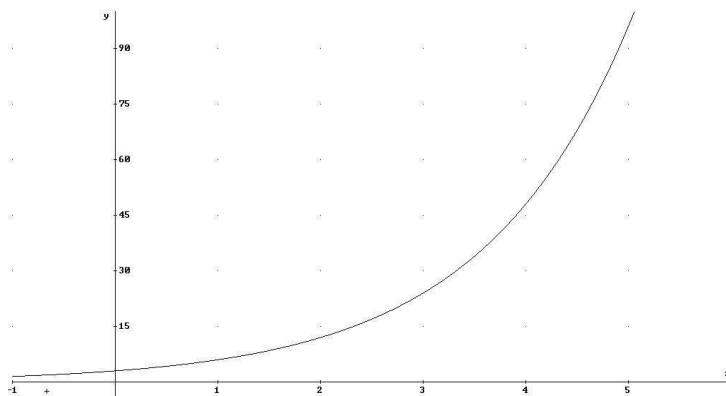


Abbildung 1: Graph von  $f(t) = 3 \cdot 2^t$

(Tipp zum Zeichnen: x-Achse in cm, y-Achse in mm)

Mit dieser allgemeinen Funktionsvorschrift kann ich nun (ohne alle Werte davor berechnen zu müssen) berechnen, wie viele Kaninchen es z.B. nach einem Jahr geben wird:

$$f(12) = 3 \cdot 2^{12} = 12288$$

**Definition:** Die Funktion  $f(x) = a^x$  bzw.  $y = a^x$  mit  $a \in \mathbb{R}^+$  heißt *Exponentialfunktion* mit Basis  $a$ .

## Beispiel 2 - „Schachanekdote“

Der Erfinder des Schachspiels bekam - laut Legende - vom indischen Herrscher einen Wunsch freigestellt. Er wünschte sich für das erste Feld des Schachbretts ein Weizenkorn und für jedes folgende die doppelte Anzahl des jeweils vorhergehenden Feldes. Wie viele Weizenkörner liegen am letzten (64.) Feld?

Feld 1	1	=	$2^0$
Feld 2	2	=	$2^1$
Feld 3	4	=	$2^2$
Feld 4	8	=	$2^3$
...	...	...	
Feld n	...	=	$2^{n-1}$

Daher folgt für das 64. Feld:

$$f(64) = 2^{64-1} = 2^{63} = 9,22 \cdot 10^{18}$$

Dieser Wert entspricht einem Vielfachen der heutigen Welt-Jahresproduktion an Weizen.

## Beispiel 3 - „Sparbuchanekdote“

Angenommen einer Ihrer Vorfahren hätte im Jahre 1 für Sie € 0,01 auf ein Sparbuch gelegt, das mit einem Jahresszinssatz von 1 % verzinst wird. Wie viel hätten Sie dann heute auf diesem Sparbuch?

Im Jahr 1 hatten wir € 0,01.

Im Jahr 2 hatten wir 1 % mehr, d.h.:

$$0,01 + \frac{0,01}{100} \cdot 1 = 0,01 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right) = 0,01 \cdot 1,01$$

Das bedeutet, dass die Verzinsung um 1 % der Multiplikation mit 1,01 entspricht. Daher geht die Entwicklung folgendermaßen weiter:

Daher liegt im Jahr 2004 (hypothetischerweise) folgender Betrag am Sparbuch:

$$f(2004) = 0,01 \cdot 1,01^{2004-1} = 0,01 \cdot 1,01^{2003} = 4525970,163$$

Jahr 1	0,01	= 0,01 · 1,01 <sup>0</sup>
Jahr 2	0,0101	= 0,01 · 1,01 <sup>1</sup>
Jahr 3	0,010201	= 0,01 · 1,01 <sup>2</sup>
Jahr 4	0,01030301	= 0,01 · 1,01 <sup>3</sup>
...	...	...
Jahr n	...	= 0,01 · 1,01 <sup>n-1</sup>

## 2 Exponentielle Vorgänge

Ein Biologe beobachtet, dass der Inhalt der Fläche, die eine Zellkultur auf einer Nährlösung einnimmt, sich in jeder Stunde um ca. 45% vergrößert. Berechne den Inhalt dieser Fläche nach 1, 2, 3, 4, 5, n Stunden, wenn sie zu Beginn der Beobachtung 1000 mm<sup>2</sup> eingenommen hat.

zu Beginn	1000		
nach 1 Stunde	1000 · 1,45	1450	= 1000 · 1,45 <sup>1</sup>
nach 2 Stunden	1450 · 1,45	2102,5	= 1000 · 1,45 <sup>2</sup>
nach 3 Stunden	2102,5 · 1,45	3048,63	= 1000 · 1,45 <sup>3</sup>
nach 4 Stunden	3048,63 · 1,45	4420,51	= 1000 · 1,45 <sup>4</sup>
nach 5 Stunden	4420,51 · 1,45	6409,73	= 1000 · 1,45 <sup>5</sup>
nach n Stunden	...	...	= 1000 · 1,45 <sup>n</sup>

Wenn man nun ein Wachstumsgesetz angeben möchte, hat das immer folgende Form:

$$N(t) = N(0) \cdot a^t$$

Wobei  $N(t)$  der Wert nach der Zeit  $t$  ist,  $N(0)$  der Anfangswert (zum Zeitpunkt 0) und  $a$  der prozentuale Veränderungsfaktor.

Dieser geht immer von 1 (steht für 100%) aus. Habe ich z.B.

- 45% *Zuwachs*, dann wird 0,45 zu 1 *addiert*. d.h.  $a = 1,45$
- 45% *Abnahme*, dann wird 0,45 von 1 *subtrahiert*. d.h.  $a = 0,55$

Berechne, um welchen Prozentsatz der Flächeninhalt in der ersten halben Stunde zunimmt:

$$\begin{aligned}
 N(0,5) &= 1000 \cdot 1,45^{0,5} \\
 N(0,5) &= 1204,16 \\
 \frac{N(0,5)}{N(0)} &= \frac{1000 \cdot 1,45^{0,5}}{1000} \\
 &= 1,20416
 \end{aligned}$$

D.h. der Zuwachs beträgt in der 1. halben Stunde 20,416%.

Zeige, dass auch in der 2., 3., 10. halben Stunde der Flächeninhalt um denselben Prozentsatz anwächst! Betrachten wir also nun die 2. und 3. halbe Stunde:

$$\begin{aligned} N(1) &= 1000 \cdot 1,45^1 \\ N(1,5) &= 1000 \cdot 1,45^{1,5} \\ \frac{N(1,5)}{N(1)} &= \frac{1000 \cdot 1,45^{1,5}}{1000 \cdot 1,45} \\ &= 1,20416 \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die 9. und 10. halbe Stunde:

$$\begin{aligned} N(4,5) &= 1000 \cdot 1,45^{4,5} \\ N(5) &= 1000 \cdot 1,45^5 \\ \frac{N(5)}{N(4,5)} &= \frac{1000 \cdot 1,45^5}{1000 \cdot 1,45^{4,5}} \\ &= 1,20416 \end{aligned}$$

Man sieht, dass der prozentuelle Zuwachs für diese Werte immer gleich groß ist.

Zeige, dass der Flächeninhalt in *jeder* halben Stunde um denselben Prozentsatz zunimmt!

$$\begin{aligned} N(t) &= 1000 \cdot 1,45^t \\ N(t+0,5) &= 1000 \cdot 1,45^{t+0,5} \\ \frac{N(t+0,5)}{N(t)} &= \frac{1000 \cdot 1,45^{t+0,5}}{1000 \cdot 1,45^t} && | : 1000 \\ &= \frac{1,45^t \cdot 1,45^{0,5}}{1,45^t} && | : 1,45^t \\ &= 1,45^{0,5} \\ &= 1,20416 && q.e.d. \end{aligned}$$

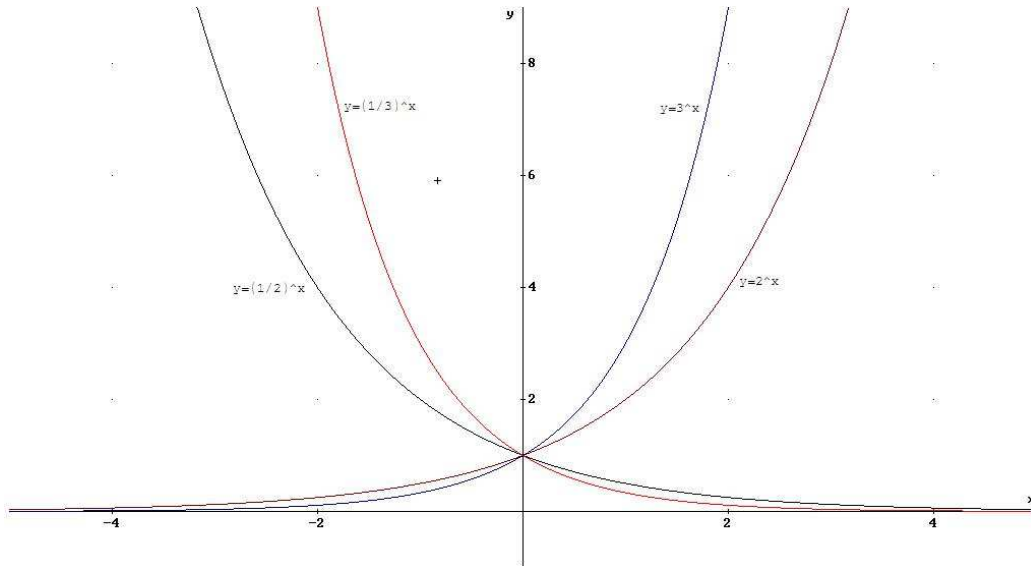
[Weitere Beispiele vom Übungszettel „Exponentielle Vorgänge“]

### 3 Eigenschaften der Exponentialfunktion

Wir stellen Wertetabellen verschiedener Exponentialfunktionen auf und zeichnen deren Graphen:

$$f_1(x) = 2^x \quad f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad f_3(x) = 3^x \quad f_4(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
-2	$\frac{1}{4}$	4	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$
2	4	$\frac{1}{4}$	9	$\frac{1}{9}$



Aus der Grafik kann man die wesentlichen Eigenschaften der Exponentialfunktion erkennen:

- Die Graphen aller Exponentialfunktionen der Form  $f(x) = a^x$  haben als einzigen den Punkt  $(0|1)$  gemeinsam, da  $a^0 = 1 \forall a \in \mathbb{R}^+$
- Die Graphen verlaufen oberhalb der x-Achse.
- Die y-Werte nähern sich der x-Achse an, erreichen sie aber nicht: Die x-Achse ist Asymptote.
- Sie ist monoton  $\begin{cases} \text{steigend für } a > 1 \\ \text{fallend für } 0 < a < 1 \end{cases}$
- Die Graphen der Exponentialfunktionen  $f(x) = a^x$  und  $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$  sind für  $a \neq 1$  symmetrisch bezüglich der y-Achse. Denn „Spiegeln“ an der y-Achse bedeutet,  $x$  durch  $-x$  zu ersetzen. Ersetzt man in  $f(x) = a^x$   $x$  durch  $-x$ , so erhält man  $f(x) = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ .

## 4 Die Logarithmusfunktion

### 4.1 Definition

Betrachten wir folgende einfache Gleichung:

$$3^x = 9$$

Hier ist klar, dass  $x = 2$  sein muss. Also besitzt diese Gleichung eine Lösung. Diese kann mit dem Logarithmus ausgedrückt werden:

$$x = \log_3 9 = 2$$

**Definition:** Wenn gilt:  $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$  für  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  und  $b \in \mathbb{R}^+$ , dann nennt man  $x$  den *Logarithmus von  $b$  zur Basis  $a$*

### Beispiele

$$\begin{array}{lll} \log_2 64 = & \log_3 \frac{1}{243} = & \log_4 8 = \\ \log_{\frac{1}{3}} 27 = & \log_{\frac{4}{5}} 1 = & \log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{25} = \end{array}$$

### 4.2 Rechenregeln für Logarithmen

Für das Rechnen mit Logarithmen gelten folgende Gesetze:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (1)$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (2)$$

$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x \quad (3)$$

### Bemerkung:

Es gilt:

- $\log_a a = 1$  weil  $a^1 = a$
- $\log_a 1 = 0$  weil  $a^0 = 1$
- $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$  (siehe Rechengesetz (3) für  $y = \frac{1}{n}$ )

### Beispiele

Zerlege folgende Terme additiv:

$$\log \frac{a^2 b^4}{\sqrt{c}} = \quad \log \frac{a^2 - b^2}{10x} = \quad \log \sqrt[3]{\frac{6x^3 \sqrt{x-2}}{x^2 - 9}} =$$

Fasse folgende Logarithmen zu einem zusammen:

$$\begin{array}{ll} \log a - \log b + \log c = & \log a + \log b - (\log c + \log d) = \\ 3 \log a - \frac{1}{3} \log(a - b) = & 4 \log x - \frac{1}{5} \left[ 3 \log(x - y) + \frac{1}{4} \log(x + y) \right] = \end{array}$$

### 4.3 Logarithmen am Taschenrechner

In der Praxis ist es sinnvoll mit wenigen „fixen“ Basen zu rechnen. Daher finden sich am Taschenrechner folgende Logarithmen:

- lg: Basis 10 („Zehnerlogarithmus“): Taste  $\boxed{\text{LOG}}$  am Taschenrechner
- ln: Basis  $e$  („natürlicher Logarithmus“): Taste  $\boxed{\text{LN}}$  am Taschenrechner<sup>1</sup>

Mit folgender „Formel“ kann man den Logarithmus zu jeder beliebigen Basis  $a$  mit dem Taschenrechner berechnen:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a} = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

## 5 Exponential- und Logarithmengleichungen

### 5.1 Wachstum und die Euler'sche Zahl

Bisher haben wir die Wachstumsgleichung der Form

$$N(t) = N(0) \cdot a^t$$

kennengelernt. In der Naturwissenschaft hat sich aber auch eine andere Form verbreitet. In dieser Variante wird statt  $a$  der Ausdruck  $e^\lambda$  gesetzt:

$$N(t) = N(0) \cdot e^{\lambda t} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Die hier verwendete Zahl  $e$  nennt man *Euler'sche Zahl*.  $e$  ist eine Naturkonstante (vergleichbar mit  $\pi$ ) und wird folgendermaßen definiert:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2,71828205\dots$$

---

<sup>1</sup>siehe Kap. 5.1 auf Seite 7

## Beispiel

Eine Bakterienkultur besteht zu Beginn aus 1000 Bakterien und wächst 2,5% pro Stunde. Stelle ein Wachstumsgesetz auf der Form

- $N(t) = N(0) \cdot a^t$
- $N(t) = N(0) \cdot e^{\lambda t}$

Die erste Form kennen wir bereits:

$$N(t) = 1000 \cdot 1,025^t$$

Für die zweite Form müssen wir  $\lambda$  berechnen:

$$\begin{aligned} a &= e^\lambda \\ 1,025 &= e^\lambda \end{aligned}$$

Man kann solche Gleichungen mit Hilfe des Logarithmus lösen. Man „logarithmiert“ die Gleichung (hier mit dem „natürlichen Logarithmus“ ) und wendet anschließend die dritte Rechenregel für Logarithmen<sup>2</sup> an und kann so die Unbekannte  $\lambda$  berechnen:

$$\begin{aligned} 1,025 &= e^\lambda \\ \ln 1,025 &= \ln e^\lambda \\ \ln 1,025 &= \lambda \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} \\ \ln 1,025 &= \lambda \\ 0,0246926 &= \lambda \end{aligned}$$

Wir haben hier deswegen den natürlichen Logarithmus verwendet, weil dieser  $e$  als Basis hat und daher gilt:

$$\log_e e = 1 \quad \text{denn:} \quad e^1 = e$$

Die gesuchte Wachstumsfunktion lautet daher:

$$N(t) = 1000 \cdot e^{0,0246926 \cdot t}$$

## 5.2 Lösung von Exponentialgleichungen

Mit diesem Verfahren des *Logarithmierens* kann (nahezu) jede Exponentialgleichung gelöst werden. *Logarithmieren* bedeutet, den Logarithmus auf die gesamte linke und die gesamte rechte Seite einer Gleichung anzuwenden:

---

<sup>2</sup>siehe Kap. 4.2 auf Seite 5

## Beispiel

$$\begin{aligned}8 &= 2^x \\ \log 8 &= \log 2^x \\ \log 8 &= x \cdot \log 2 \\ \frac{\log 8}{\log 2} &= x \\ 3 &= x\end{aligned}$$

### 5.3 Der Logarithmus und die Frage „Wann?“

Wenn wir zu unserem „klassischen“ Bakterienbeispiel zurückkehren, ist es auch interessant zu fragen, wann (bei welchem  $t$ ) ein gewisser Wert über- oder unterschritten wird. Das Wachstumsgesetz lautete:

$$N(t) = 1000 \cdot 1,025^t$$

Frage: *Wann* erreicht die Bakterienkultur eine Größe von 2000 Bakterien?

Die Frage stellt also die Frage nach dem  $t$ , bei dem der Wert von 2000 überschritten wird:

$$\begin{aligned}2000 &\leq 1000 \cdot 1,025^t \\ 1000 &\leq 1,025^t \\ \log 1000 &\leq \log 1,025^t \\ \log 1000 &\leq t \cdot \log 1,025 \\ \frac{\log 1000}{\log 1,025} &\leq t \\ 279,75 &\leq t\end{aligned}$$

Die Antwort lautet also 279,75 bzw. 280 Stunden (wenn in ganzen Stunden gerechnet wird).

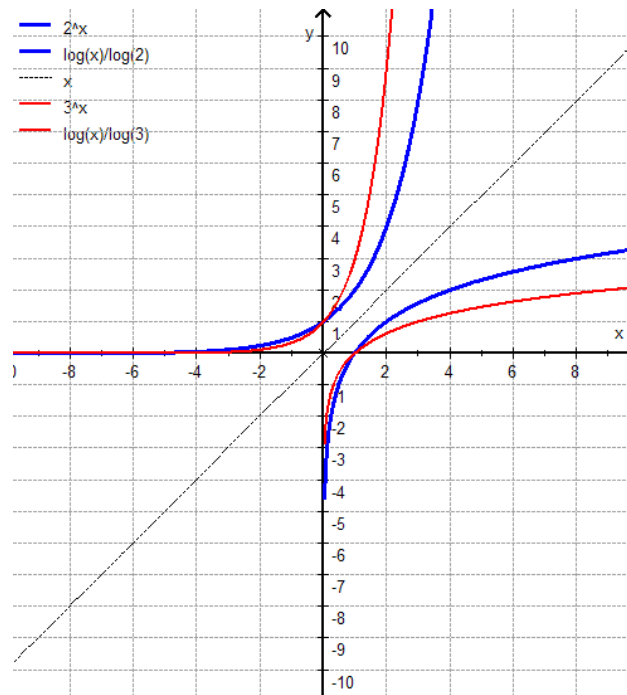
## 6 Eigenschaften der Logarithmusfunktion

Wir betrachten (und zeichnen) folgende Funktionen:

$$f_1(x) = 2^x \quad f_2(x) = 3^x \quad f_3(x) = \log_2 x \quad f_4(x) = \log_3 x$$

### Anmerkung:

Die Berechnung jedes beliebigen Logarithmus erfolgt mit der Formel aus 4.3 auf Seite 7.



Wie man aus der Grafik gut erkennen kann, hat die Logarithmusfunktion  $f(x) = \log_a x$  folgende Eigenschaften ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, x \in \mathbb{R}^+$ ):

- Die Logarithmusfunktion  $\log_a x$  ist die *Umkehrung der Exponentialfunktion*  $a^x$ . (Spiegelung an der 1. Mediane)  
Denn: Die Umkehrung von  $y = a^x$  lautet:  $x = a^y$ . Um wieder auf eine Form  $y = \dots$  zu kommen, muss man den Logarithmus anwenden:

$$\begin{aligned}
 x &= a^y \\
 \log_a x &= \log_a a^y \\
 \log_a x &= y \cdot \underbrace{\log_a a}_{=1} \\
 \log_a x &= y
 \end{aligned}$$

- Definitionsmenge  $D = \mathbb{R}^+$
- Wertemenge  $W = \mathbb{R}$
- Die y-Achse ist Asymptote.
- $f(x) = \log_a x$  geht immer durch den Punkt P(1|0).
- $f(x) = \log_a x$  ist für  $a > 1$  streng monoton wachsend, für  $0 < a < 1$  streng monoton fallend.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Nicht aus der Grafik erkennbar.