

Differentialrechnung

Mag. Martin Bruckbauer

18. April 2005

1 Mittlere Änderungsrate (Differenzenquotient)

1.1 Definition

Wenn Vorgänge durch mathematische Funktionen beschrieben werden, ist es oft von Interesse, wie sich die Funktion in bestimmten Bereichen verhält. Nehmen die Funktionswerte zu oder ab? Wie stark nehmen sie zu oder ab?

Beispiel: Im Jahr 1992 wurde in einem Staat die Regierung von der Partei A übernommen. Im Jahre 1996 erfolgte ein Regierungswechsel; die Partei B regierte bis zum Jahr 1999, in dem Neuwahlen stattfanden. Im Zuge des Wahlkampfes argumentierte die Partei A: „In unserer Regierungszeit von 1992 bis 1996 hat das mittlere Jahreseinkommen um $62000 - 48000 = 14000$ WE zugenommen, in der Regierungszeit von Partei B nur um 12000 WE. Wir sind also besser.“ Ist diese Argumentation richtig?

Mittleres Jahreseinkommen $E(t)$ im Jahre t	
t	$E(t)$
1992	48.000
1993	51.000
1994	55.000
1995	58.000
1996	62.000
1997	65.000
1998	69.000
1999	74.000

Lösung: Die Argumentation besagt wenig, da man hier den „mittleren Zuwachs pro Jahr“ vergleichen müsste:

$$\text{Regierungszeit Partei A: } \frac{E(1996) - E(1992)}{1996 - 1992} = \frac{14000}{4} = 3500$$

$$\text{Regierungszeit Partei B: } \frac{E(1999) - E(1996)}{1999 - 1996} = \frac{12000}{3} = 4000$$

Der mittlere Einkommenszuwachs pro Jahr war also in der Regierungszeit der Partei B größer.

Allgemein: Wie *stark* sich die Funktion f im Intervall $[a,b]$ ändert, gibt die Differenz $f(b) - f(a)$ an. Um angeben zu können, wie *rasch* sich die Funktion f ändert, muss die Differenz $f(b) - f(a)$ im Verhältnis zur Breite des Intervalls betrachtet werden. Man braucht also den Quotienten $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Definition: Es sei f eine reelle Funktion. Dann heißt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

der *Differenzenquotient* oder die *mittlere Änderungsrate* von f in $[a,b]$.

Bemerkung 1:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

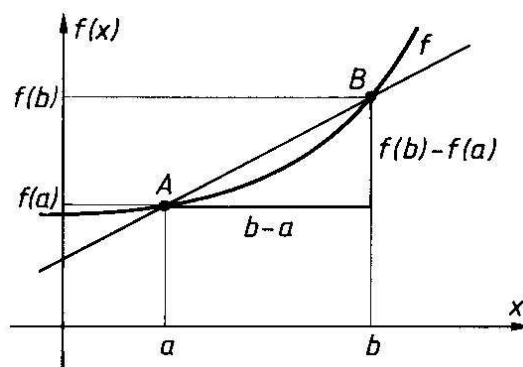
Bemerkung 2: Für $f(b) - f(a)$ schreibt man auch Δf und für $b - a$ schreibt man auch Δx .

Beispiele:

Berechne den Differenzenquotienten im Intervall $[a,b]$!

1. $f(x) = x^3$ $[2,6]$
2. $g(x) = 2x^2 - 3$ $[-1,1]$
3. $h(x) = \frac{2}{x} + 3$ $[1,4]$

1.2 Geometrische Deutung des Differenzenquotienten



Der Differenzenquotient einer Funktion f im Intervall $[a,b]$ ist gleich der **Steigung der Geraden** durch die Punkte $A = (a|f(a))$ und $B = (b|f(b))$.

Diese Gerade nennt man auch *Sekante* des Funktionsgraphen im Intervall $[a,b]$

1.3 Die mittlere Geschwindigkeit

Zugplan Salzburg Hbf - Bischofshofen:

Ort	Uhrzeit		Entfernung von Sbg
	an	ab	
Salzburg Hbf		07:04	
Salzburg Süd	07:14	07:15	9 km
Hallein	07:21	07:22	19 km
Golling-Abtenau	07:29	07:30	30 km
Werfen	07:45	07:46	47 km
Bischofshofen	07:51		54 km

Berechne die mittlere Geschwindigkeit des Zuges zwischen

a.) Salzburg Hbf und Hallein

b.) Hallein und Bischofshofen.

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Zuerst rechnen wir die notwendigen Uhrzeiten in Stunden um:

$$7:04 = 7,0667$$

$$7:21 = 7,35$$

$$7:22 = 7,3667$$

$$7:51 = 7,85$$

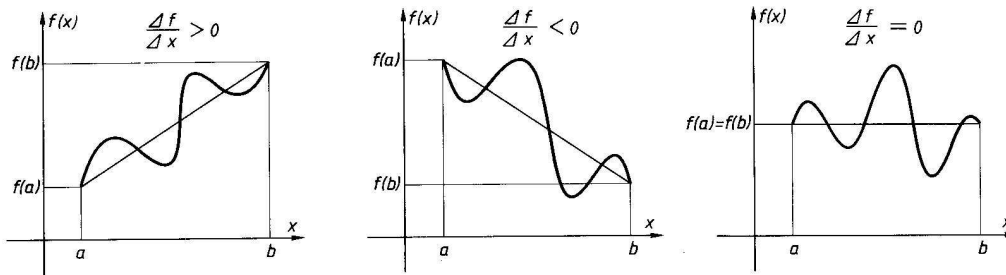
a.)

$$\begin{aligned} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} &= \frac{19 - 0}{7,35 - 7,0667} \\ &= 67,3 \text{ km/h} \end{aligned}$$

b.)

$$\begin{aligned} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} &= \frac{54 - 19}{7,85 - 7,3667} \\ &= 72,4 \text{ km/h} \end{aligned}$$

1.4 Vorzeichen des Differenzenquotienten



2 Der Differentialquotient (momentane Änderungsrate)

Wir haben gesehen, dass man mit Hilfe des Differenzenquotienten die mittlere Geschwindigkeit berechnen kann. Möchte man jedoch die momentane Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt berechnen, muss man weitere Überlegungen anstellen. Wir können den Differenzenquotienten aber als Näherungswert verwenden:

2.1 Einführungsbeispiel - Die Momentangeschwindigkeit

Aufgabe: Bestimme näherungsweise die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers nach 3 Sekunden. Für die Weg-Zeit-Funktion gilt:

$$s(t) = 5t^2$$

Wir berechnen nun die mittleren Geschwindigkeiten in Zeitintervallen $[3; z]$, wobei wir z immer kleiner wählen, damit das Intervall immer kleiner wird:

Die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[3; z]$ ist:

$$\bar{v}(3; z) = \frac{s(z) - s(3)}{z - 3} = \frac{5z^2 - 45}{z - 3}$$

Wie man aus Tabelle 1 auf Seite 5 ablesen kann, wird die Momentangeschwindigkeit eines Körpers nach 3 Sekunden ca. bei 30 m/s liegen.

Einfacher wäre es gewesen, das betrachtete Intervall gleich 0 zu setzen, also $z = 3$ zu wählen. Dann hätten wir allerdings durch 0 dividieren müssen.

Zeitintervall $[3, z]$	Mittlere Geschwindigkeit
$[3; 4]$	35
$[3; 3,5]$	32,5
$[3; 3,3]$	31,5
$[3; 3,1]$	30,5
$[3; 3,01]$	30,05
$[3; 3,001]$	30,005

Tabelle 1: Das Intervall wird immer kleiner ...

Man kann allerdings z beliebig an 3 annähern lassen, indem man folgenden Grenzwert berechnet:

$$\lim_{z \rightarrow 3} \frac{5z^2 - 45}{z - 3} \quad 1$$

Wenn sich hier z immer näher an 3 annähert, wird das Intervall $[3; z]$ immer kleiner (d.h. die Differenz $z - 3$ strebt gegen 0.)

Allgemein kann man nun folgende Definition aufstellen:

2.2 Definition

Es sei f eine reelle Funktion. Der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

heißt *Differentialquotient* der Funktion f an der Stelle x (oder *Änderungsrate* der Funktion f an der Stelle x .)

Bemerkung: Man nennt $f'(x)$ auch *1. Ableitung von f* (an der Stelle x)

2.3 Berechnung des Differentialquotienten

Betrachten wir unsere Funktion von vorher: $f(t) = 5t^2$. Wir wollen die Momentangeschwindigkeit eines fallenden Körpers nach 3 Sekunden berechnen, also $f'(3)$:

Anmerkung: Man berechnet den Limes $f'(x)$ so, indem man für z x einsetzt. Da $f'(x)$ jedoch ein Quotient ist, muss man ein bißchen umformen, bevor man einsetzen kann:

¹spricht: „Limes“ (Grenzwert)

$$\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{f(z) - f(3)}{z - 3} \\
&= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{5z^2 - 45}{z - 3} \\
&= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{5 \cdot (z^2 - 9)}{z - 3} \\
&= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{5 \cdot (z + 3)(z - 3)}{z - 3} \\
&= \lim_{z \rightarrow 3} 5 \cdot (z + 3)
\end{aligned}$$

jetzt einsetzen: $= 5 \cdot (3 + 3)$
 $= 30$

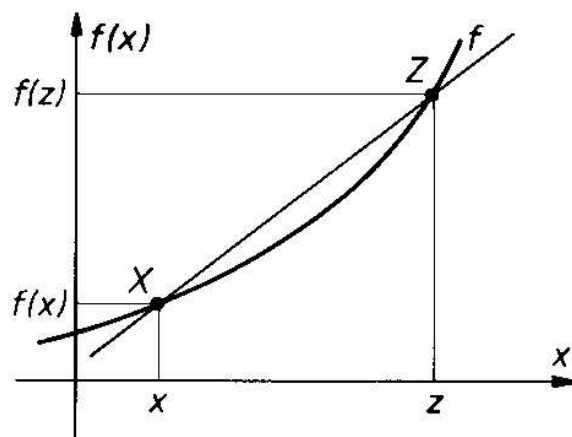
Beispiele:

- $f(x) = x^2$ Berechne $f'(1)$, $f'(5)$, $f'(-3)$!
- $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1$ Berechne $f'(-1)$, $f'(2)$, $f'(0)$!

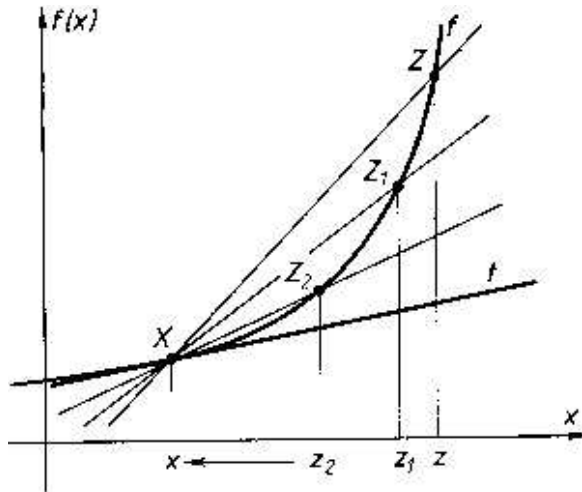
2.4 Geometrische Deutung des Differentialquotienten

Wir wissen bereits, dass der Differenzenquotient einer Funktion f im Intervall $[x; z]$ gleich der Steigung der Tangente der Geraden durch die Punkte $X = (x; f(x))$ und $Z = (z; f(z))$ ist. Es gilt:

$$\text{Steigung der Sekante} = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$



Wenn nun z immer näher an x heran“rutscht“ wird die Sekante langsam zu einer Tangente der Funktion f an der Stelle x .



Der *Differentialquotient* oder die *1. Ableitung* entspricht daher der *Steigung der Tangente* von $f(x)$ an der Stelle x .

2.5 Differentiationsregeln - Ableitungsregeln

2.5.1 Potenzfunktionen

Wir differenzieren $f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{z^2 - x^2}{z - x} \\
 &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{(z - x)(z + x)}{z - x} \\
 &= \lim_{z \rightarrow x} (z + x) \\
 &= 2x
 \end{aligned}$$

noch ein Beispiel: $f(x) = x^3$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{z^3 - x^3}{z - x} \\
 &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{(z - x)(z^2 + zx + x^2)}{z - x} \\
 &= \lim_{z \rightarrow x} (z^2 + zx + x^2) \\
 &= x^2 + x^2 + x^2 \\
 &= 3x^2
 \end{aligned}$$

Allgemein:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^n \\
 f'(x) &= n \cdot x^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}^*
 \end{aligned}$$

insbesondere gilt:

$$\begin{aligned}f(x) &= x \\f'(x) &= 1\end{aligned}$$

Beispiele:

Bilde $f'(x)$!

- $f(x) = x^5$
- $f(x) = x^{500}$
- $f(x) = x^{n+1}$

2.5.2 konstante Funktionen

wir differenzieren $f(x) = 7$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{7 - 7}{z - x} \\&= \lim_{z \rightarrow x} 0 \\&= 0\end{aligned}$$

Allgemein:

$$\begin{aligned}f(x) &= c \\f'(x) &= 0 \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

2.5.3 Produkt einer Funktion mit einem konstanten Faktor

Es sei f eine reelle Funktion und $c \in \mathbb{R}$. Wenn wir $g(x) = c \cdot f(x)$ differenzieren wollen, gilt:

$$\begin{aligned}g'(x) &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{g(z) - g(x)}{z - x} \\&= \lim_{z \rightarrow x} \frac{c \cdot f(z) - c \cdot f(x)}{z - x} \\&= \lim_{z \rightarrow x} \frac{c \cdot (f(z) - f(x))}{z - x} \\&= \lim_{z \rightarrow x} c \cdot \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \\&= c \cdot f'(x)\end{aligned}$$

Allgemein:

Sei $f = f(x)$ eine reelle Funktion und $f' = f'(x)$, dann gilt:

$$(c \cdot f)' = c \cdot f' \quad c \in \mathbb{R}$$

z.B.: Differenziere:

- $f(x) = 2x^4$
 $f'(x) = 2 \cdot 3x^3$
 $f'(x) = 6x^3$
- $f(x) = -4x^2$
 $f'(x) = -4 \cdot 2x^1$
 $f'(x) = -8x$

2.5.4 Summe (Differenz) von Funktionen

Summenregel:

Sind f und g reelle Funktionen, f' und g' ihre Ableitungen, so gilt:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

Man kann Summen von Funktionen also gliedweise differenzieren!
Diese Regel gilt auch für mehrere Funktionen!

z.B. Differenziere:

- $f(x) = x^3 + x^2$
 $f'(x) = 3x^2 + 2x$
- $f(x) = 2x^5 - 4x^3$
 $f'(x) = 10x^4 - 12x^2$
- $f(x) = 10x^6 - 8x^5 - 3x^2 + 3$
 $f'(x) = 60x^5 - 40x^4 - 6x (+0)$
- $f(x) = 5(x^3 - 4x^2 + x - 2)$
 $f'(x) = 5(3x^2 - 8x + 1)$
 $f'(x) = 15x^2 - 40x + 5$

2.6 Geradengleichung einer Tangente

Ermittle die Steigung der Tangente der Funktion $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$ an der Stelle $x = 0$ sowie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0; f(0))!$

Erinnerung: Die 1. Ableitung in einem Punkt entspricht der Steigung der Tangente an den Graphen in diesem Punkt! Also

$$f'(a) = k \quad (k \text{ ist die Steigung der Tangente in } a)$$

Wir berechnen zunächst $f'(x)$:

$$f'(x) = 6x^2 - 4$$

und dann die Steigung der Tangente im Punkt $x = 0$ mit $f'(0)$:

$$f'(3) = 6 \cdot 0^2 - 4 = -4$$

Die Tangente hat also die Steigung $k = -4$.

Zur Berechnung der Geradengleichung ($y = kx + d$) setzen wir einen bekannten Punkt in die allgemeine Geradengleichung ein. Wir kennen den Punkt $(0; f(0))$. Wir haben $f(0)$ jedoch noch nicht berechnet, daher:

$$f(0) = 2 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0 + 1 = 1$$

Wir kennen also den Punkt $(0; 1)$ und setzen diesen in die allgemeine Geradengleichung $y = kx + d$ ein:

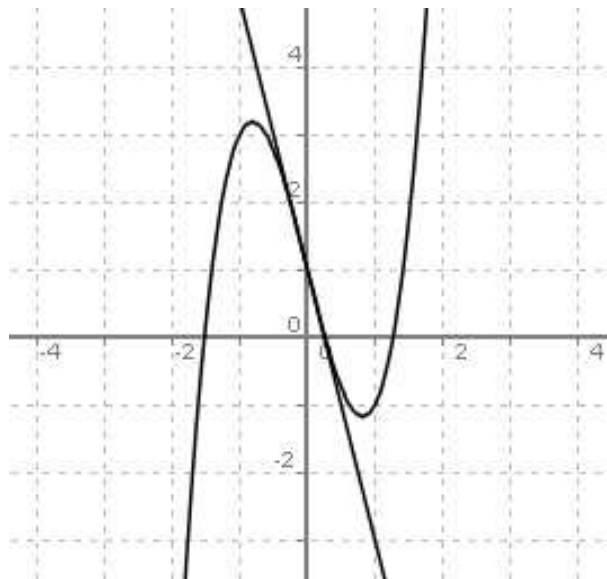
$$\begin{aligned} y &= kx + d \\ 1 &= -4 \cdot 0 + d \end{aligned}$$

Daraus folgt: $d = 1$.

Die Gleichung der Tangente an f im Punkt $x = 0$ lautet also:

$$y = -4x + 1$$

Hier der Graph von $f(x)$ und die berechnete Tangente:



3 Untersuchung von Polynomfunktionen - Kurvendiskussion

Die erste ($f'(x)$) bzw. zweite Ableitung ($f''(x)$) liefern gute Möglichkeiten, eine Funktion $f(x)$ genauer zu untersuchen und ihr Verhalten zu beschreiben bzw. besondere Stellen aufzufinden.

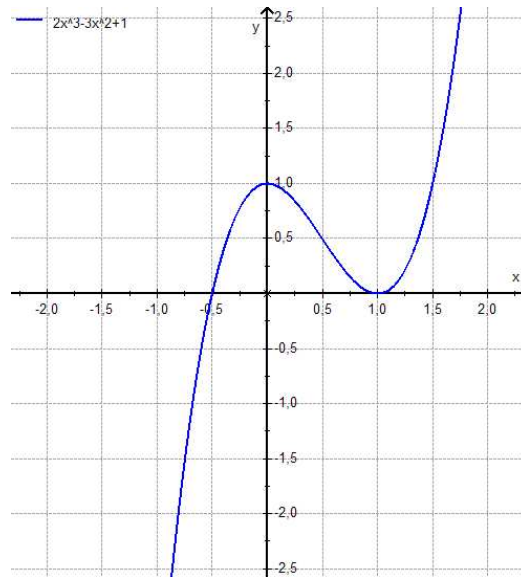
3.1 Nullstellen

Nullstellen, sind diejenigen Punkte, in denen gilt:

$$f(x) = 0$$

Das sind also all diejenigen Punkte, in denen der Graph von $f(x)$ die x-Achse schneidet bzw. berührt.

Wir betrachten $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$:



Zur Berechnung der Nullstellen müssen wir die Gleichung $f(x) = 0$ lösen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2x^3 - 3x^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Da wir hier ein Polynom 3. Grades haben, haben wir keine Formel, die wir zur Lösung anwenden können. Nach dem Satz von Vieta kann man jedoch jedes Polynom n-ten Grades in Faktoren der Form

$$\underbrace{(x - l_1)(x - l_2) \dots (x - l_n)}_{n \text{ Faktoren}}$$

aufspalten. (l_1, \dots, l_n sind die n Lösungen des Polynoms.) Wir führen daher eine *Polynomdivision* durch. Die erste Lösung müssen wir allerdings durch „Probieren“ finden. (Tipp: eine Lösung des Polynoms ist (meist) ein Teiler des Koeffizienten von x^0 - also desjenigen Summanden ohne x . Bei uns ist das 1.)

Setzen wir also versuchsweise 1 ein:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 + 1 &= 0 \\ 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 2 - 3 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Unsere erste Lösung ist also $x_1 = 1$.

Jetzt können wir diese Lösung „abspalten“, d.h. wir dividieren $(2x^3 - 3x^2 + 1)$ durch $(x - 1)$:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 3x^2 + 1) : (x - 1) = 2x^2 - x - 1 \\ \underline{-2x^3 + 2x^2} \\ -x^2 + 1 \\ \underline{x^2 - x} \\ -x + 1 \\ \underline{x - 1} \\ 0 \end{array}$$

Die Vorgehensweise dabei ist ähnlich der Division von Zahlen:

1. Die Division erfolgt durch $(x -$ der gefundenen Lösung $x_1)$
2. *Dividieren*: (immer durch $x!$ das „ -1 “ wird nur „mitgeschleppt“), d.h. $2x^3 : x = 2x^2$
3. *Multiplizieren* (von rechts nach links) und darunter schreiben: $2x^2 \cdot x = 2x^3$ und $2x^2 \cdot (-1) = -2x^2$
4. *Vorzeichen ändern*: aus $2x^3$ wird $-2x^3$ und aus $-2x^2$ wird $2x^2$
5. *Addieren*: $2x^3 + (-2x^3) = 0$ (muss wegfallen) und $-3x^2 + 2x^2 = -x^2$
6. den nächsten Summanden (1) herunterholen und jetzt von vorne:
7. *Dividieren*: $-x^2 : x = -x$
8. *Multiplizieren*: $(-x) \cdot x = -x^2$ und $(-x) \cdot (-1) = x$
9. *Vorzeichen ändern*: aus $-x^2$ wird x^2 und aus x wird $-x$
10. *Addieren*: $-x^2 + x^2 = 0$ und $1 - x = -x + 1$ (richtig ordnen).
11. Eigentlich würden wir jetzt den nächsten Summanden holen, da wir aber bereits einen zweite Summanden haben (1), unterlassen wir dies.
12. usw. bis zuletzt 0 Rest bleibt.

Nun bleibt uns nur mehr folgende quadratische Gleichung zu lösen:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

ABC-Formel:

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2}$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = -\frac{1}{2}$$

Unsere Nullstellen lauten also:

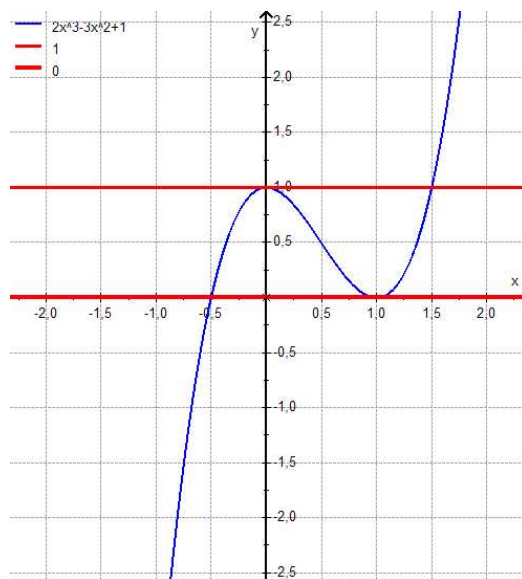
$$\mathbf{N}_1\left(-\frac{1}{2}/0\right) = \mathbf{N}_3 \quad \mathbf{N}_2(1/0)$$

Anmerkung

Ein Polynom (in \mathbb{R}) vom Grad n hat *maximal* n Lösungen. (Es kann also maximal n Nullstellen geben.)

3.2 Extremstellen (lokales Maximum bzw. Minimum)

Wir betrachten wieder $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$:



An den Stellen, wo $f(x)$ in einem gewissen Bereich eine Extremstelle, also ein lokales Maximum oder Minimum hat, steht die Tangente waagrecht. Es gilt also für diese Punkte:

$$f'(x) = 0$$

Wir berechnen diese Punkte:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 6x^2 - 6x \\0 &= 6x^2 - 6x \\0 &= 6x(x - 1) \\x_1 &= 0 \\x_2 &= 1\end{aligned}$$

Die jeweiligen y-Werte dieser Punkte bekommen wir, indem wir die x-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ einsetzen:

$$\begin{aligned}f(0) &= 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 1 \\f(0) &= 1 \\f(1) &= 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 \\f(1) &= 0\end{aligned}$$

Die beiden Extremstellen haben also die Koordinaten:

$$E_1(0/1) \quad E_2(1/0)$$

Sind diese Extremstellen nun Maxima oder Minima?

Ob ein Extremwert E ein Maximum (Hochpunkt) oder Minimum (Tiefpunkt) ist, können wir mit der 2. Ableitung $f''(x)$ feststellen, denn es gilt:

$$f''(E) \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{Tiefpunkt/Minimum} \\ < 0 & \Rightarrow \text{Hochpunkt/Maximum} \\ = 0 & \Rightarrow \text{Sattel- bzw. Terrassenpunkt (d.h. kein Extremwert)} \end{cases}$$

Wir überprüfen also unsere beiden Extremwerte E_1 und E_2 :

$$\begin{aligned}f''(x) &= 12x - 6 \\f''(0) &= -6 < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \\f''(1) &= 6 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}\end{aligned}$$

Die beiden Extremwerte lauten also:

$$\mathbf{H(0/1)} \quad \mathbf{T(1/0)}$$

3.3 Wendepunkte und Krümmung

Wir betrachten wieder $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ und bilden die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1 \\f'(x) &= 6x^2 - 6x \\f''(x) &= 12x - 6\end{aligned}$$

Wendepunkte sind diejenigen Punkte, in denen sich das *Krümmungsverhalten* ändert. Wenn ein Autofahrer eine Linkskurve und anschließend eine Rechtskurve fährt, schlägt er zunächst nach links ein, lenkt aus, fährt kurz geradeaus und lenkt anschließend nach rechts. Diese Stelle, an der er kurz die Räder in Geradeaus-Stellung hat, entspricht dem Wendepunkt.

Den Wendepunkt kann man dadurch bestimmen, indem man die Stellen berechnet, in denen gilt:

$$f''(x) = 0$$

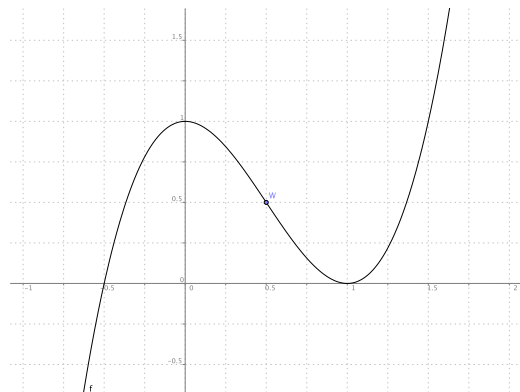
Bei uns:

$$12x - 6 = 0$$

$$12x = 6$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ daher hat der Wendepunkt die Koordinaten $\mathbf{W}(\frac{1}{2}/\frac{1}{2})$.



3.4 Zusammenfassung der Kurvendiskussion

Die Grundform der Kurvendiskussion besteht darin, folgende Stellen zu berechnen:

- Nullstellen
- Extremstellen
- Wendepunkte

Berechnet werden diese Punkte jeweils dadurch, dass $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ Null gesetzt wird:

Nullstellen	$f(x) = 0$
Extremwerte	$f'(x) = 0$
Wendepunkte	$f''(x) = 0$

4 Physikalische Bedeutung der Ableitungen

Betrachtet man eine Funktion $s(t)$, die den zurückgelegten Weg pro Zeit beschreibt, gilt:

- der Differenzenquotient $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ entspricht der *mittleren Geschwindigkeit* zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2
- $s'(t)$ entspricht der *Momentangeschwindigkeit* zum Zeitpunkt t
- $s''(t)$ entspricht der *Beschleunigung* zum Zeitpunkt t (und wird oft als $a(t)$ bezeichnet)

5 Aufsuchen von Polynomfunktionen (Umgekehrte Kurvendiskussion)

Aufgrund verschiedener Informationen ist es möglich, die Funktionsgleichung einer Polynomfunktion zu „rekonstruieren“:

Beispiel:

Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat den Tiefpunkt $T(3/1)$ und die Steigung im Punkt $P(0/1)$ beträgt 3. Ermittle die Funktionsgleichung!

Die Funktionsgleichung (3. Grades) hat die Darstellung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Die Ableitung sieht so aus:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Wir haben folgende Informationen: ²

1. Der Graph geht durch den Punkt $T(3/1)$. Daher gilt:

$$\begin{aligned}f(3) &= 1 \\27a + 9b + 3c + d &= 1\end{aligned}$$

2. Der Graph geht durch den Punkt $P(0/1)$. Daher gilt:

$$\begin{aligned}f(0) &= 1 \\d &= 1\end{aligned}$$

²Es müssen immer gleich viele Informationen sein, wie Unbekannte!

3. 3 ist ein Extremwert. Also gilt:

$$\begin{aligned}f'(3) &= 0 \\27a + 6b + c &= 0\end{aligned}$$

4. An der Stelle 0 beträgt die Steigung der Tangente 3, also gilt:

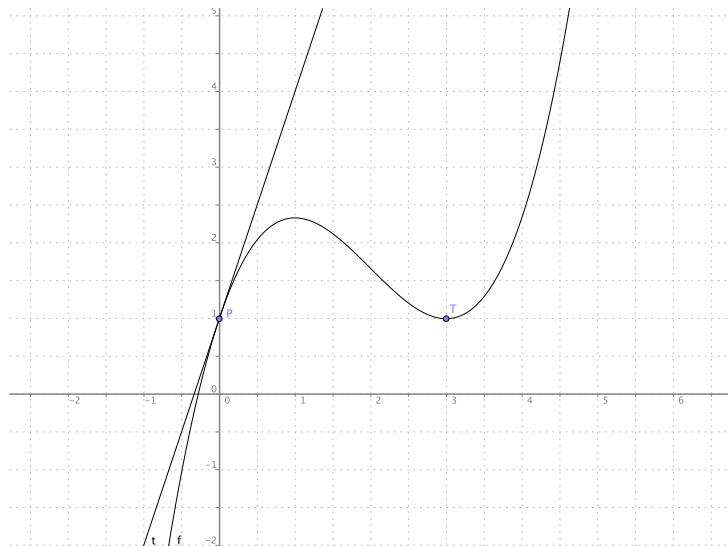
$$\begin{aligned}f'(0) &= 3 \\c &= 3\end{aligned}$$

Wir müssen also nur mehr folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned}27a + 9b + 3c + d &= 1 \\d &= 1 \\27a + 6b + c &= 0 \\c &= 3\end{aligned}$$

Die Auflösung liefert: $a = \frac{1}{3}$, $b = -2$, $c = 3$, $d = 1$. Daher lautet die Gleichung der gesuchten Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$



6 Weitere Ableitungsregeln - Ableitung spezieller Funktionen

6.1 Quotientenregel

Mit den bisher bekannten Regeln können wir nur Polynomfunktionen differenzieren. Folgende Funktion ist aber keine Polynomfunktion:

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Quotientenregel: Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar und ist $g(x) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

Nun können wir die obere Funktion $f(x) = \frac{x}{x+1}$ differenzieren (wobei $f(x) = x$ und $g(x) = x+1$ ist):

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Beispiele: Bestimme $f'(x)$!

- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$
- $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$
- $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2}$

6.2 Produktregel

Besteht eine Funktion aus der Multiplikation zweier anderer Funktionen, also z.B.

$$f(x) = x^2(2x - 1)$$

benötigt man die Produktregel (sofern ein Ausmultiplizieren unmöglich ist³):

³... was hier schon möglich wäre

Produktregel: Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar, so ist auch $f \cdot g$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$$

Die obere Funktion ergibt daher:

$$(x^2(2x - 1))' = 2x \cdot (2x - 1) + 2 \cdot x^2 = 6x^2 - 2x$$

Beispiele: Bestimme $f'(x)$!

- $f(x) = (x^2 + 2x)(x^2 - 1)$
- $f(x) = x^3(x^2 - 3x)$
- $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2}$
- $f(x) = x^2 \frac{2x + 1}{x + 1}$

6.3 Kettenregel

Wenn Funktionen ineinander verschachtelt sind, z.B. ein Quadrat über einem Binom oder eine Wurzel über einem Bruch, brauchen wir die Kettenregel.
z.B. bei:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 1)^3 \\ f(x) &= (4x^2 + 2x - 1)^5 \\ f(x) &= \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Kettenregel: Ist g an der Stelle x und h an der Stelle $g(x)$ differenzierbar, dann ist auch $h(g(x))$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$(h(g))' = h'(g) \cdot g'$$

In Worten:

äußere Ableitung Mal innere Ableitung

z.B.:

$$f(x) = (x^2 + 1)^3$$

Die *innere Funktion* ist $x^2 + 1$ und die *äußere Funktion* ist das Quadrat. Wir leiten also zunächst die äußere Funktion ab (das Quadrat) und multiplizieren

dies mit der Ableitung der inneren Funktion:

$$f'(x) = \underbrace{3 \cdot (x^2 + 1)^2}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{innere Ableitung}}$$

Beispiele: Bestimme $f'(x)$!

- $f(x) = (4x^2 + 2x - 1)^5$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
- $f(x) = \sqrt{x(2x + 1)}$
- $f(x) = x(x^2 - 3x)^3$

6.4 Ableitung der Winkelfunktionen

Die Ableitung der Winkelfunktionen $\sin(x)$ $\cos(x)$ sind leicht zu merken, da sie zyklisch sind:

$$\begin{aligned} (\sin(x))' &= \cos(x) \\ (\cos(x))' &= -\sin(x) \\ (-\sin(x))' &= -\cos(x) \\ (-\cos(x))' &= \sin(x) \end{aligned}$$

...

Leitet man den Tangens nach der Quotientenregel ab, gilt:

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ (\tan(x))' &= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - (-\sin(x)) \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ (\tan(x))' &= \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

6.5 Ableitung der Exponentialfunktion

Die Regel für die Ableitung der Exponentialfunktion lautet:

$$f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

Insbesondere für $f(x) = e^x$:

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$$

6.6 Ableitung der Logarithmusfunktion

Die Regel für die Ableitung der Logarithmus lautet:

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Oder allgemeiner:

$$f(x) = \log_a(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

7 Extremwertaufgaben

Mit Hilfe der ersten Ableitung $f'(x)$ ist es möglich, bei gewissen Problemstellungen Maximal- bzw. Minimallösungen zu finden.

Beispiel:

Auf einer Wiese soll ein rechteckiges Fläche mit 200 m Zaun so abgesteckt werden, dass der Flächeninhalt A möglichst groß wird.

Beim Lösen von Extremwertaufgaben gilt immer folgendes Schema:

1. Aufstellen der Hauptbedingung (HB). (Dies soll jeweils maximal oder minimal werden und hat meist mehrere Unbekannte.)
2. Aufstellen der Nebenbedingung (NB). (Eine weitere geltende Bedingung, in denen die Unbekannten aus der HB vorkommen.)
3. Ausdrücken einer Unbekannten aus der NB und einsetzen in die HB.
4. Berechnen der Extremwerte der HB (Ableiten, Null setzen, ...)⁴
5. Auswählen der sinnvollen Lösung und berechnen der fehlenden Unbekannten.

Nun lösen wir unser Beispiel:

1. *Hauptbedingung:* Maximal soll hier der Flächeninhalt werden. Wenn a die Breite und b die Länge ist, lautet die HB:

$$A(a, b) = a \cdot b \rightarrow \text{maximal}$$

2. *Nebenbedingung:* Da in der HB zwei Unbekannte vorkommen, und wir so keinen Maximalwert berechnen können, brauchen wir eine zweite Bedingung, mit der wir uns a oder b ausdrücken können. Wir wissen, dass der Zaun 200 m lang ist. Also ist unsere Nebenbedingung:

$$2a + 2b = 200$$

⁴Eine Überprüfung, ob ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt, ist in den meisten Fällen unnötig, da sich die Bedeutung des Extremwerts aus der Aufgabenstellung ergibt.

3. Wir formen die NB um und drücken uns eine der beiden Unbekannten aus (hier a):

$$2a + 2b = 200$$

$$2a = 200 - 2b$$

$$a = 100 - b$$

Nun setzen wir $100 - b$ für a in der HB ein:

$$A(b) = (100 - b) \cdot b$$

4. Nun berechnen wir die Extremwerte der Funktion $A(b)$:

$$A(b) = (100 - b) \cdot b$$

$$A(b) = 100b - b^2$$

$$A'(b) = 100 - 2b$$

$$0 = 100 - 2b$$

$$2b = 100$$

$$b = 50$$

5. Wir haben hier nur eine Lösung bekommen, nämlich $b = 50$. Aus $a = 100 - b$ erhalten wir für a :

$$a = 100 - b$$

$$a = 100 - 50$$

$$a = 50$$

Das flächengrößte Rechteck mit Umfang 200 ist also ein Quadrat mit der Seitenlänge 50.

Mögliche Nebenbedingungen sind:

- Angabe
- Formel
- Pythagoras
- Strahlensatz

Inhaltsverzeichnis

1	Mittlere Änderungsrate (Differenzenquotient)	1
1.1	Definition	1
1.2	Geometrische Deutung des Differenzenquotienten	2
1.3	Die mittlere Geschwindigkeit	3
1.4	Vorzeichen des Differenzenquotienten	4
2	Der Differentialquotient (momentane Änderungsrate)	4
2.1	Einführungsbeispiel - Die Momentangeschwindigkeit	4
2.2	Definition	5
2.3	Berechnung des Differentialquotienten	5
2.4	Geometrische Deutung des Differentialquotienten	6
2.5	Differentiationsregeln - Ableitungsregeln	7
2.5.1	Potenzfunktionen	7
2.5.2	konstante Funktionen	8
2.5.3	Produkt einer Funktion mit einem konstanten Faktor	8
2.5.4	Summe (Differenz) von Funktionen	9
2.6	Geradengleichung einer Tangente	9
3	Untersuchung von Polynomfunktionen - Kurvendiskussion	10
3.1	Nullstellen	11
3.2	Extremstellen (lokales Maximum bzw. Minimum)	13
3.3	Wendepunkte und Krümmung	14
3.4	Zusammenfassung der Kurvendiskussion	15
4	Physikalische Bedeutung der Ableitungen	16
5	Aufsuchen von Polynomfunktionen (Umgekehrte Kurvendiskussion)	16
6	Weitere Ableitungsregeln - Ableitung spezieller Funktionen	18
6.1	Quotientenregel	18
6.2	Produktregel	18
6.3	Kettenregel	19
6.4	Ableitung der Winkelfunktionen	20
6.5	Ableitung der Exponentialfunktion	20
6.6	Ableitung der Logarithmusfunktion	21
7	Extremwertaufgaben	21